UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vytváření představ zlomku na 1. stupni ZŠ

Creating images of fraction at the elementary school

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Marie Tichá, CSc.

Autor diplomové práce: Marta Siblíková

Studijní obor: učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Forma studia: prezenční

Diplomová práce dokončena: červen, 2014

Abstrakt

Diplomová práce Vytváření představ zlomku na 1. stupni základní školy je rozdělena na teoretickou a výzkumnou část. Teoretická část diplomové práce vymezuje učivo o zlomcích v kurikulárních dokumentech, zabývá se pojmem matematická gramotnost, seznamuje se základními pojmy, které se týkají učiva o zlomcích a propedeutikou zlomku na 1. stupni základní školy. Praktická část je rozdělena do dvou částí, předvýzkum a následný výzkum. Cílem předvýzkumu je zmapování znalostí žáků o zlomcích na 1. stupni základní školy v porovnání s odbornými znalostmi uvedenými v teoretické části. Výzkumná část je zaměřena na ověření závěrů vyplývajících z předvýzkumu a to upřednostňování modelu kruh před ostatními modely. Dále zjišťuje to, zda jsou žáci průběžně seznamováni i s jinými modely (úsečka, obdélník, soubor předmětů).

Klíčová slova

Zlomek, propedeutika, modely, reprezentace, primární vzdělávání, kurikulární dokumenty.

Abstract

This thesis "Creating images of fraction at the elementary school" is divided into theoretical and practical part. The theoretical part defines the subject matter of fractions in curriculum, deals with a mathematical literacy concept and introduces basic conceptions related to fractions and propaedeutic of fractions at the Primary School. The practical part consists of a preparatory research and a consequential research. The goal of the preparatory research is fractions knowledge mapping on Primary School pupils comparing to an expert knowledge acquired in the theoretical part. The consequential research focuses on confirming results of the preparatory research, respectively preferring the circle model off other models. It also checks if pupils get acquainted with other models (line segment, rectangle, and set of discrete objects).

Key words

Fraction, propaedeutic, models, representation, primary education, curricula.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Vytváření představ zlomku na 1. stupni ZŠ vypracovala pod vedením vedoucího diplomové práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Nesouhlasím s trvalým uložením práce do databáze Theses.

V Praze dne …………… Podpis: …………………………

Poděkování

Děkuji všem, kteří svými podněty přispěli k napsání této práce, zejména velmi děkuji vedoucí práce Mgr. Marii Tiché, CSc. za kvalitní vedení diplomové práce, za podnětné připomínky, vstřícnost a trpělivost.

Dále děkuji Mgr. Haně Hartychové za podnětné připomínky v hodině dvanácté a kolegyním z kabinetu, které mě v mé práci plně podporovaly. Poděkování patří též mé rodině a přátelům za jejich podporu a trpělivost.

Obsah

ÚVOD

Pro téma své diplomové práce „Vytváření představ zlomku na 1. stupni základní školy“ jsem se rozhodla z několika důvodů. Během studia na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy jsem měla možnost seznámit se s didaktikami různých předmětů, které jsou pro učitele na prvním stupni základní školy stěžejní. V daném množství předmětů a seminářů mě však nejvíce zaujala matematika. Při výběru tématu diplomové práce jsem věděla, že matematika je pro mě prvotní volba. Problémem pro mě bylo, jakým směrem se v diplomové práci, zaměřené na matematické vzdělávání, vydat. Které téma pro mě bude nejen zajímavé, ale hlavně přínosné pro mé budoucí povolání učitelky na prvním stupni základní školy?

Ve 4. ročníku studia mě zaujala nabídka semináře Didaktické situace ve vyučování matematice pod vedením Mgr. Marie Tiché, CSc. V úvodní hodině jsme od paní magistry dostali slovní úlohu zaměřenou na téma zlomky: *Jirka a Martin mají dohromady 35 kuliček. Jirka má o* $\frac{1}{3}$ *kuliček více než Martin. Kolik kuliček má Martin?* Při výpočtu jsem postupovala takto: Jirka má $\frac{2}{3}$ z 35 kuliček. Martin má $\frac{1}{3}$ z 35 kuliček. Přičemž $35 : 3 = 11,\overline{6}$. Tento výpočet však nedával smysl. Až s odstupem času jsem si uvědomila, v čem spočíval problém. Špatně jsem si určila, co je celek (základ).

Během počítání jsem se vrátila do svého dětství a vzpomněla jsem si, jak náročné pro mě toto učivo bylo. Uvědomila jsem si, že početní operace se zlomky mi nečinily potíže, ale jakmile jsem dostala slovní úlohu, tak jsem si nevěděla rady. Opět jsem se cítila jako na základní škole. I tehdy jsem nad slovními úlohami seděla a dlouze rozmýšlela, které údaje, data a vztahy mezi nimi jsou pro mě potřebné a jakým způsobem je matematizovat. Jak sestavit výpočet, který by dával smysl, se kterým jsem si již uměla poradit. Chvílemi jsem si říkala, zda jsem při výběru vysoké školy volila správně, zda budu schopna provést žáky učivem matematiky tak, aby matematiku chápali a vytvořili si k ní pozitivní vztah. Zvláště, aby si matematiku oblíbili.

V té chvíli mě uklidnil pohled na mé spolužáky v místnosti, kteří s danou slovní úlohou měli stejné problémy jako já. Při pohledu do jejich poznámek jsem si uvědomila, že jsme při výpočtu postupovali stejně. Začala jsem přemýšlet, co může být příčinou.

Vždyť se jedná o úlohy pro první stupeň základní školy. Proč právě úlohy se zlomky jsou pro mnohé z nás takovým „oříškem“? Jak mám jednou pracovat se žáky na základní škole, aby se nedostali do stejné situace jako já? Jelikož nemám ráda situace, kdy si nevím rady, zvláště je-li to oblast, o kterou se zajímám, rozhodla jsem se tento seminář vzít jako výzvu. Od té doby jsem se těšila na každou další hodinu, kdy se budu moci tomuto tématu postavit čelem a začala jsem věřit, že ho jednou porazím. A asi právě tento moment byl rozhodující pro volbu tématu mé diplomové práce.

Delší dobu jsem přemýšlela, jakým směrem se vydat.

- **Kde se stala ta chyba, že já jako studentka vysoké školy si nedovedu poradit s úlohami pro první stupeň základní školy?**
- **Jak bych tomu já, jako budoucí učitelka na základní škole, mohla předcházet?**
- **Kdy se tématu zlomku začít věnovat?**
- **Kdy začít budovat představy?**
- **Co je vlastně propedeutikou?**
- **Co bych neměla opomenout, abych žáky na prvním stupni základní školy dostatečně připravila na pochopení pojmu zlomek a řešení úloh se zlomky?**

Právě na tyto otázky jsem se zaměřila ve své diplomové práci, kde se pokusím na ně najít odpovědi.

Jádro mé práce tvoří dvě části: teoretická a praktická.

První část je zaměřena na teorii, kterou jsem zpracovala pomocí uvedené dostupné odborné literatury. V teoretické části práce začínám charakteristikou Rámcově vzdělávacího programu a Školního vzdělávacího programu a vymezuji, jak tyto koncepty chápu, snažím se ukázat klady i zápory. Zabývám se rozvíjením matematické gramotnosti, porozumět metodice a umět ji použít v reálném světě (Kuřina, 2011)[1]. Vymezuji ji dostupnými dokumenty, které pojednávají o oblasti matematika a její aplikace na základní škole. Poté se snažím vytipovat matematické pojmy, se kterými se

[1] Pokud se odvolávám volně na určitou práci, uvádím ji takto v textu. Pokud cituji, odvolávám se na zdroj pod čarou.

setkáváme v životních situacích a při výuce na základní škole. Za velmi důležité považuji pochopení vztahu celku a části, které hraje významnou úlohu při budování představ zlomků, představuje propedeutiku pojmu zlomek.

Ve druhé, praktické části ukazuji okruhy, na které se soustřeďuji, formuluji otázky a rozhoduji se pro metodu, s jejíž pomocí se budu snažit otázky zodpovědět. Nejdříve jsem se zaměřila na předexperiment a poté následný výzkum. Původním záměrem předexperimetnu bylo zmapovat, jaké představy o zlomcích mají žáci na prvním stupni základní školy. Především žáci třetích a pátých ročníků základní školy. Tento předexperiment jsem realizovala na Základní škole Na Dědině v třetím a pátém ročníku. Během předexperimentu jsem si všimla určitých jevů. V následném výzkumu jsem se na tyto jevy zaměřila. Pracovala jsem ve dvou fázích. Nejdříve jsem si chtěla potvrdit či vyvrátit má zjištění z předvýzkumu. Tato fáze výzkumu proběhla v Základní škole Kunratice ve třetích až pátých ročnících. Na základě získaných zjištění jsem se pustila do závěrečné fáze výzkumu, kdy jsem žákům 3. a 4. ročníku ZŠ Uhelný trh předložila pracovní list s úkoly. Tyto úkoly mi pomohly uzavřít můj výzkum a formulovat závěry.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Kurikulární dokumenty

Kurikulární dokumenty jsou veřejné dokumenty přístupné pedagogické i nepedagogické veřejnosti. Jsou v souladu se vzdělávacími zájmy státu a státní kurikulární politikou. Tyto dokumenty mají dvě úrovně:

- státní dokumenty;
- školní dokumenty.

1.1.1 Rámcový vzdělávací program

Dokumenty na úrovni státního kurikula jsou závazné pro všechny etapy výchovně vzdělávacího procesu v rámci celého systému českého školství vyjma vysokých škol. Mají široký rozsah, zahrnují vzdělávání všech dětí, žáků a studentů od 3 do 19 let.

- **Národní vzdělávací program** zahrnuje vzdělávání jako celek.
- **Rámcové vzdělávací programy** (dále jen RVP) jsou kurikulární dokumenty, které mají celostátní platnost. Představují tedy závazný rámec výchovně vzdělávacích etap, počínaje předškolním vzděláváním a konče vzděláváním středním.

„Pro každý obor vzdělání v základním a středním vzdělávání a pro předškolní, základní umělecké a jazykové vzdělávání se vydávají rámcové vzdělávací programy. Rámcové vzdělávací programy vymezují povinný obsah, rozsah a podmínky vzdělávání; jsou závazné pro tvorbu školních vzdělávacích programů, hodnocení výsledků vzdělávání dětí a žáků, tvorbu a posuzování učebnic a učebních textů a dále závazným základem pro stanovení výše finančních prostředků přidělovaných podle § 160 až 162“[2] (viz zákon č. 561/2004 Sb. §3 odst. 2).

[2] Zákon číslo 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů. [online]. [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: <http://portal.gov.cz/app/zakony/zakonPar.jsp?idBiblio=58471&fulltext=~C5~A1koln~C3~AD~20vzd~C4~9Bl~C3~A1vac~C3~AD~20program&nr=561~2F2004&part=&name=&rpp=15#local-content >

RVP jsou pojmenovány podle vzdělávací etapy, na kterou jsou zaměřeny. Jednotlivé názvy jsou čerpány z webových stránek Národního ústavu pro vzdělávání [1].

Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání (RVP PV)

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV)

Rámcový vzdělávací program pro základní umělecké vzdělávání (RVP ZUV)

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP GV)

Rámcový vzdělávací program pro střední odborné vzdělávání (RVP SOV)

Rámcový vzdělávací program pro speciální vzdělávání (RVP SV)

Jednotlivé RVP jsou provázané, navazují na sebe, kladou velký důraz na klíčové kompetence, vymezují je, a popisují, jaké úrovně klíčových kompetencí by měl každý žák na konci dané etapy, období dosáhnout [2].

Já se ve své práci soustředím na Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.

1.1.2 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) je závazný dokument vymezující obsah vzdělávání pro všechny základní školy včetně odpovídajících ročníků víceletých středních škol [3]. Je rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí, které tvoří jeden nebo více obsahově blízkých oborů.

RVP ZV charakterizuje jednotlivé vzdělávací oblasti, vymezuje cílové zaměření a specifikuje obsah jednotlivých vzdělávacích oblastí. Tento vymezený povinný obsah vzdělávacích oblastí tvoří očekávané výstupy a učivo, které má žák zvládnout za dané období - I. stupeň ZŠ je rozdělen na dvě období, II. stupeň ZŠ je označován jako třetí období (6. – 9. ročník).

Očekávané výstupy předmětů, které se na prvním stupni základní školy vyučují, jsou rozloženy do dvou období. První období končí třetím ročníkem, jedná se tedy o 1. – 3. ročník a výstupy jsou nezávazné (orientační). Druhé období vymezuje 4. – 5. ročník a výstupy na jeho konci jsou závazné. Učivo, které má žák za dané období zvládnout, si mohou školy ve svém školním vzdělávacím programu rozložit podle svého uvážení. Avšak důležitým mezníkem na prvním stupni základní školy je právě konec pátého ročníku, jehož očekávané výstupy jsou závazné a žák by je měl naplňovat, aby mohl ve svém dalším vzdělávání na dosažené výstupy navazovat a dále se rozvíjet [2].

„Očekávané výstupy mají činnostní povahu, jsou prakticky zaměřené, využitelné v běžném životě a ověřitelné. Vymezují předpokládanou způsobilost využívat osvojené učivo v praktických situacích a v běžném životě.“[3]

Do oblasti Matematika a její aplikace v RVP ZV je začleněn vzdělávací obsah oboru *Matematika a její aplikace* (názvy podle RVP 2013). Tento vzdělávací obor se dále dělí na čtyři tematické okruhy, které specifikují obsah vzdělávacího oboru:

- *Číslo a početní operace*
- *Závislosti, vztahy a práce s daty*
- *Geometrie v rovině a prostoru*
- *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*

Učivo o zlomcích je zařazeno do tematického okruhu *Číslo a početní operace* [2].

1.1.3 Školní vzdělávací program

Školní vzdělávací program (dále jen ŠVP) je školní učební dokument, který je každá základní škola v České republice povinna vytvořit sama podle svého zaměření. Je vytvářen podle požadavků RVP ZV. Při tvorbě ŠVP se vychází ze specifikovaných klíčových kompetencí, očekávaných výstupů a učiva v RVP ZV a ŠVP je musí naplňovat. Tento fakt, že každá základní škola může zařadit učivo do jakéhokoli ročníku v daném období, přináší škole i žákům klady i zápory.

Učitelé určité školy si mohou učivo uspořádat tak, jak jim vyhovuje, jak vidí souvislosti, které chtějí ukázat, a předpokládá se, že se jejich přesvědčení kladně odrazí ve výuce. Záleží také na zaměření školy a možnostech, jaké škola má (finance,

[3] Rámcově vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze od 1. 9. 2013) úplné znění upraveného RVP ZV [online] Praha 2013 [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: < http://www.nuv.cz/file/319>

vybavení, velikost, atd.), ale také na poloze školy, žácích, kteří školu navštěvují, atd. Tvorba ŠVP klade velké nároky na učitele. Vyžaduje dobrou didaktickou znalost obsahu. Znalost matematického obsahu a jeho didaktického zpracování a uplatnění těchto znalostí v praxi. Je také nutné, aby se vyučující všech ročníků podrobně seznámili se ŠVP, aby věděli, jaké znalosti a způsobilosti mohou předpokládat a kam výuka směřuje.

I některým žákům může skutečnost, že každá škola má vlastní ŠVP, činit nemalé potíže. Tyto potíže mohou nastat např. při změně bydliště, jelikož obsah učiva v ŠVP pro daný ročník na prvním stupni jedné základní školy nemusí být shodný s ŠVP jiné základní školy. V takovémto případě se například žák 4. ročníku může dostat do situace, kdy je učivo o zlomcích na jeho stávající základní škole zařazeno až do 5. ročníku. O prázdninách změní své bydliště a na jeho nové základní škole je učivo o zlomcích zařazeno již do 4. ročníku [2].

1.2 Zlomky v primárním vzdělávání

Zařazení učiva o zlomcích na první stupeň základní školy je velice diskutované téma. Často od učitelů slýchám otázky typu: „Patří či nepatří zlomky do učiva na první stupeň základní školy? Není toto učivo příliš náročné pro žáky na prvním stupni základní školy?“ (Tichá, Macháčková, 2006). Osobně zastávám názor, že zlomky, zvláště budování představ, do učiva na první stupeň základní školy patří. Záleží však na tom, jakým způsobem s tímto učivem budeme pracovat. Co do učiva na první stupeň zařadíme, jak ho budeme žákům předkládat, co mohou žáci na prvním stupni pochopit a jaké výsledky můžeme očekávat. Na tyto otázky jsem se snažila najít odpovědi. Zaměřila jsem se tedy na způsob zavádění zlomků a jejich zařazení do učiva na prvním stupni základní školy.

V RVP ZV z roku 2007 bylo učivo o zlomcích zařazeno až na druhý stupeň základní školy. Teprve v RVP ZV platným od 1. 9. 2013 jsou očekávané výstupy a obsah učiva o zlomcích začleněny do 2. období (konec 5. ročníku, tzn. 10 – 11 letí žáci) [4] a jsou formulovány takto:

„Žák modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku. Žák porovnává, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel.“[4]

V některých řadách učebnic se učivo týkající se rozdělování celku na stejné části (tedy propedeutika učiva o zlomcích) objevuje již od prvního ročníku. Budování pojmů je zaměřeno především na manipulaci a vychází z předchozích mimoškolních zkušeností žáků.

Příkladem může být učebnice Matematika 2, pro 1. ročník základní školy nakladatelství FRAUS autorů M. Hejný, D. Jirotková, J. Slezáková - Kratochvílová. V této učebnici, přestože je určena pro 1. ročník základní školy, nalezneme propedeutiku zlomků, která vychází z každodenních zkušeností žáků. Pro lepší představu jsou tyto úkoly znázorněny obrázkem, který žákům umožní lépe si vybavit danou situaci. První úkol nalezneme na obrázku 1.1.

Obr. 1.1: Rozdělení provázku

Obr. 1.2.: Rozdělení koláče

Zde vidíme chlapce, který drží v ruce provázek a nůžky. Jeho úkolem je provázek rozpůlit. Druhý úkol vychází z obrázku 1.2. V tomto případě vidíme dva žáky, kteří mají za úkol rozdělit si spravedlivě koláč. Ke splnění těchto úkolů, bychom měli nabídnout potřebné pomůcky (provázek, vytisknutý koláč na papír A4), které jim pomohou uchopit problém a vlastní manipulací ho vyřešit.

Při řešení úkolu na obrázku 1.2, by někteří žáci po rozkrojení koláče mohli namítat, že rozdělení není spravedlivé. Jelikož jeden žák má na svém kousku více ovoce než druhý

[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze od 1. 9. 2013) úplné znění upraveného RVP ZV [online] Praha 2013 [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: < http://www.nuv.cz/file/319>

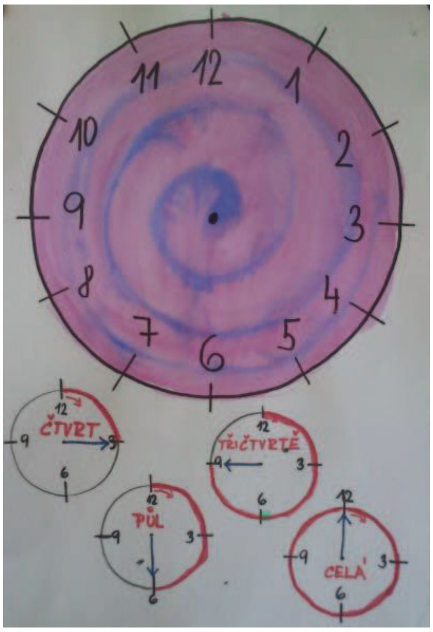
žák. Zde je proto nutné vymezit si s žáky, co znamená spravedlivé dělení. Pod pojmem spravedlivé dělení v této situaci rozumím dělení celku na stejně velké díly. To znamená, že pokud by žáci položili své části koláče na sebe, tak budou velikostně shodné - stejně velké (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003).

1.2.1 Využití zlomku v primárním vzdělávání

Zlomky mají různé využití. V této kapitole se zaměřím na to, v jaké formě se zlomky mohou vyskytovat na prvním stupni základní školy.

Žáci se s pojmy celek a část setkávají již v předškolním věku. A to jak v rodině, tak v předškolních zařízeních. Je pro ně přirozené a samozřejmé pracovat se slovy čtvrt, půl, tři čtvrtě, … Tato slova vycházejí z reálného života a žáky neustále obklopují. Ukázkou často užívaných slovních spojení by mohlo být: půlka chleba, třetina zápasu, čtvrtka pizzy, tři čtvrtě hodiny, půllitr limonády, … I když to jsou pouze slova, tak pod těmito slovy označujícími části celku máme zabudovanou představu, se kterou žáci dokáží pracovat. Dá se říci, že se slovním vyjádřením zlomku se děti setkávají již v předškolním věku. Seznámit se s těmito vyjádřeními je potřebné, jelikož v konkrétních situacích jsou zlomky téměř nenahraditelné desetinnými čísly. Nikdy jsem v obchodě neslyšela přání zákazníka, který by po prodavači žádal například: nula celá pět desetin chleba, či nula celá dvacet pět setin pizzy, …

V mladším školním věku se se zlomky (v podobě slovního vyjádření) žáci setkávají nejen v běžném životě, ale i v různých vyučovacích předmětech a ne pouze v hodinách matematiky. I když se žáci se zlomky v hodinách matematiky ještě nesetkali, dokáží si s nimi poradit a rozumí jim. Jedním z příkladů by mohl být předmět Člověk a jeho svět (Prvouka), kde se žáci již od prvního ročníku základní školy seznamují s učivem o času a používají termíny: čtvrt hodiny, půl hodiny a dokonce jedna a půl hodiny. Slova čtvrt, půl, tři čtvrtě, celá sice znají jako říkanku, ale jakmile je doplníme obrázky, dostávají tato slova konkrétní podobu. Příkladem by mohl být obrázek 1.3.



Obr. 1.3: Hodiny – čtvrt, půl, tři čtvrtě, celá

Na tomto obrázku vidíme hodiny, které jsem měla možnost během své souvislé pedagogické praxe vyrábět v hodině výtvarné výchovy s žáky prvního ročníku. Každý žák si vyrobil své hodiny, se kterými jsme poté pracovali v předmětu Člověk a jeho svět (Prvouka). Jak je vidět na obrázku, pod hodinami se nachází menší hodiny, na kterých jsou tato slova (čtvrt, půl, tři čtvrtě, celá) znázorněna.

Dalším příkladem mohou být hodiny tělesné výchovy. Zde se mohou žáci dělit do stejně početných družstev. Zjišťují například, do kolika čtyřčlenných družstev se mohou rozdělit (tady se jedná o dělení po částech). Nebo se mohou rozdělit do určitého počtu družstev, například vytvořit tři družstva. Tehdy zjišťují, kolik žáků bude v každém družstvu (zde se jedná o dělení na části). [5]

Ve výuce tématu zlomek na prvním stupni základní školy dochází k tomu, že učitel, často nedostatečně nebo vůbec, nevyužívá předchozích znalostí, které žák o vztahu celek a jeho část/části má díky množství reálných situací vyskytujících se v každodenních aktivitách. Ve fázi seznamování se zlomky je třeba přistupovat k žákům individuálně, to znamená uvědomovat si, že každý žák vnímá své okolí jinak a jeho předchozí znalosti a zkušenosti mohou být jiné, než předpokládáme. Přesto je důležité

[5] K termínům dělení na části a po částech se podrobněji věnuji v kapitole Dělení celku (str. 26).

z těchto dřívějších zkušeností a znalostí vycházet a stavět na nich. Je třeba budovat u žáků představy zlomků pomocí přehledných a jasných modelů, které v ideálním případě žák sám vymyslí nebo převezme z reálného života. Ty vedou správným směrem k pozdější symbolické reprezentaci. Pokud žák při učení se zlomkům přeskočí nebo nedostatečně pochopí jednotlivé kroky, nevybuduje a neukotví si představy o pojmu v jeho životní zkušenosti, nebude v budoucnu chápat pravidla provádění operací se zlomky (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003). Naučí se je pamětně, ale nebude se orientovat v jiných než mechanicky procvičovaných úlohách vytržených z reálného dění. Za stěžejní tedy považuji propojení představ čísel se zkušenostmi a znalostmi žáků. Velká část práce se zlomky by se tedy měla soustředit na činnostní (manipulace s předměty) a ikonické (obrázky) představy. Například překládat papír, stříhat, přesouvat předměty, …

1.3 Reprezentace zlomků

Jak jsem už několikrát uvedla, již malé děti získávají představy o vztahu celku a části. Připravují se tím na budování představ zlomku v každodenních situacích, zvláště při mimoškolních aktivitách - během svých her, rozhovorů, atd. Podobně je tomu i v mateřských školách.

„Dítě přichází do mateřské školy s určitými zkušenostmi ze svého okolí. Některé z nich je možné v rámci rozumové výchovy úspěšně využívat při vytváření prvních matematických představ a při jejich rozvíjení. Pod vedením učitelky se děti zaměřují na pozorování, objevují vlastnosti předmětů a vztahy mezi objekty okolního světa. Jestliže pozorujeme hru pětiletých až šestiletých dětí a posloucháme jejich rozhovor, vidíme, že manipulují s matematickými prvky. Děti zjišťují, kdo má více bonbónů, větší čokoládu, více autíček, menší panenku, dvě jablka, mnoho kostek, stejné obrázky, tolik hrnečků jako talířků, nebo zda ze stavebnice nic nechybí atd. Všechno, co vzbuzuje zájem dětí, se objeví v jejich hrách. Proto je potřebné hledat zajímavé činnosti a hry a usměrňovat je tak, aby při nich děti získaly zkušenosti matematického charakteru.“[6]

Stejně je tomu i s učivem zlomků na prvním stupni základní školy. Proto, aby žáci dobře porozuměli učivu o zlomcích a získali vhled do dané problematiky, měla by být jejich pozornost systematicky rozvíjena pomocí různých reprezentací. A jak uvádí mnozí autoři, zásoba různých reprezentací by měla být neustále obohacována (a to se týká nejen zlomků) (Tichá, Macháčková, 2006).

To znamená, že žák bude mít dostatek prostoru pro zpracovávání nových informací. Dostatek času, kdy bude manipulovat s předměty, což mu umožní porozumět do hloubky dané problematice. Na základě vlastní aktivity se zkušenost vryje do paměti, kde bude uchována. Takovéto zkušenosti může žák kdykoli využít, jakmile bude stát před podobným problémem (Průcha, Walterová, Mareš, 2013).

František Kuřina se ve svém článku (Kuřina, 1993) zmiňuje o známém americkém psychologovi J. S. Brunerovi, který mluví o třech typech reprezentací: „Jevy můžeme reprezentovat pomocí činností, s nimiž jsou bezprostředně svázány, nebo pomocí zobrazení, nebo pomocí slov či jiných symbolů … Jde tedy o reprezentace činnostní, ikonické a symbolické.“[7]

Bruner mluví o třech typech reprezentace, přičemž slovní vyjádření pokládá za doplňkové. Já pokládám za přínosné vyčlenit slovní vyjádření, verbální reprezentaci, zvlášť, jako samostatnou reprezentaci. Mezi reprezentace, kterým bychom tedy měli věnovat nejdelší čas a „hrát“ si s nimi a které pedagogové, psychologové a didaktici zdůrazňují, patří: **činnostní a ikonická reprezentace,** které nás dovedou k **verbální a symbolické reprezentaci**. Vyjma symbolické reprezentace, se kterou se žáci seznamují až koncem primárního vzdělávání, se se všemi dalšími reprezentacemi setkávají v průběhu nejen primárního vzdělávání, kdy je potřebné tyto reprezentace rozvíjet, ale také se s nimi nevědomky setkávají již v předškolním věku.

[6] DIVÍŠEK, J., BUŘIL, Z., A KOL. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, str. 22 - 23. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.
[7] KUŘINA, F. Škola a vzdělání v roce 400. výročí narození Jana Amose Komenského. Pedagogika, 1993, č. 3. str. 313. ISSN 0031-3815.

Nyní se pokusím popsat jednotlivé reprezentace tak, jak je mohu s žáky na prvním stupni uplatňovat a rozvíjet je.

Činnostní reprezentace (učení) podle Pedagogického slovníku:

„Činnostní učení v obecném pojetí je učení, v němž jedinec není pasivním příjemcem, ale projevuje vlastní iniciativu, je aktivní, přemýšlí, hledá, klade otázky, pracuje sám nebo v týmu.“[8]

Činnostní reprezentace je tedy založena na činnosti žáků, kteří se aktivně zapojují. Jde hlavně o manipulaci, kdy mají v rukou hmatatelné předměty, které přemisťují, rozdělují, krájí, stříhají a překládají.

Ikonická reprezentace podle Pedagogického slovníku:

„Ikonická reprezentace je souborem obrazů, prostorových nebo grafických schémat, neobsahující ještě plnou definici objektu, kterými se „zobrazuje reprezentované“.“[9]

Žák se od manipulace dostává k obrázkům, na kterých jsou činnostní reprezentace znázorněny. Pro jejich pochopení využívá vlastní zkušenosti z činnostní reprezentace. V této chvíli si ve své paměti promítá již získané zkušenosti a nadále s nimi pracuje. Jedná se především o obrázky ve 2D, ale patří sem i 3D stavby z krychlí, které mohou být žákům předkládány, ale sami žáci si hledají vlastní ikonické reprezentace, které pro ně osobně budou přehledné.

Verbální reprezentace (slovní vyjádření) provází všechny předchozí druhy reprezentací. Během všech fází mluvíme o tom, co jsme našli, objevili, s čím pracujeme a snažíme si všechny nové poznatky nějak pojmenovat a utřídit si je. V této chvíli nejde o přímé pojmenování vztahu části a celku zlomkem, ale o malé krůčky k tomu, abychom se ke konkrétním pojmům dostali.

Činnostní, ikonická i verbální reprezentace nejsou v žádném případě samostatné fáze, ale od začátku mezi sebou nenásilně proplouvají a navzájem se prolínají. O jednotlivých činnostech se verbálně vyjadřujeme, často k nim používáme jiné modely, ke kterým se

[8] PRŮCHA, J. WALTEROVÁ, E. MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál 2013, str. 41. ISBN 978-80-262-0403-9.
[9] PRŮCHA, J. WALTEROVÁ, E. MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál 2013, str. 246. ISBN 978-80-262-0403-9.

znovu vyjadřujeme. Dále se naše poznatky pokoušíme nějakým způsobem zaznamenat, čímž využíváme ikonické záznamy, které jsou v danou chvíli pro žáky nejpřehlednější. Ke svým záznamům se opět vracíme a verbálně se k nim vyjadřujeme. Tento proces se stále opakuje, čímž se prohlubují znalosti žáků.

Za nejvyšší fázi považuji **symbolickou reprezentaci,** podle Pedagogického slovníku:

„Symbolická reprezentace je nejvyšší formou, užívá abstraktních symbolických kódů, z nichž nejvýznamnější je jazyk.“[10]

Tato fáze by měla být až závěrečná, kdy se žáci dostávají k zaznamenávání zlomku obvyklým znakem, symbolem. Zde by si pomocí předchozích fází měli uvědomovat a mít jasnou představu, co se pod daným symbolem skrývá. Tato fáze by měla být nenásilná a žákům by se způsoby zaznamenání neměly předkládat v hotové formě. Měl by být poskytnut dostatek prostoru k vlastnímu objevování a uvědomování si potřeby jednoduššího zaznamenání a hlavně potřeby zjednodušení záznamů z ikonické do číselné podoby.

Učitel by v tuto chvíli měl být v ústraní a místo autoritativního přístupu, kdy záznamy předloží, žáky nepřímo vést a usměrňovat. Případně na základě zájmu nabízet možnosti. Ne vždy a u každého žáka se vše podaří, proto bychom po přechodu k symbolům neměli zapomínat na předchozí budování představ a stále se k nim vracet a dále je prohlubovat. Je velice důležité, aby se tyto reprezentace vyváženě prolínaly a na každou byl kladen stejný důraz a čas pro jejich porozumění.

Velmi důležité pro budování správných představ a porozumění učivu, je dotazování. Během celého procesu žákům neustále klademe otázku „proč“, vyzýváme je k vysvětlování postupu, zdůvodňování jejich řešení. Velmi osvědčená metoda učení se je kooperativní vyučování, kdy žáci pracují ve skupinkách a neustále mezi sebou komunikují, vysvětlují, potvrzují a vyvrací si navzájem své předpoklady nebo tvrzení.

Upozorním ještě na nebezpečí spojené s dělením na části, kde se žáci mohou dopouštět chyb, je když si intuitivně spojují zlomek s dělením celku na jakékoliv části. Je důležité včas zdůraznit, že jde o dělení podle stanovených kritérií a to na stejné části.

---

[10] PRŮCHA, J. WALTEROVÁ, E. MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál 2013, str. 246. ISBN 978-80-262-0403-9.

Příklad:

- *Koláč rozlomíme na tři části, odpovídá jeden ulomený kus třetině koláče?*
- *Maminka upustila talíř a ten se rozbil na osm kousků. Odpovídá jeden kousek jedné osmině talíře?*

1.4 Modely zlomků

Během seznamování se se zlomky, pracujeme s různými modely. Tyto modely slouží žákům jako pomůcky. V literatuře se nejčastěji uvádí, že modelem může být **kruh** (koláč, pizza, dort), **obdélník** (čokoláda, list papíru), **úsečka** (tyč, provázek, proužek papíru), **soubor předmětů** (kuličky, bonbóny).

Tyto modely se mohou vyskytovat v kontinuální (spojité) či diskrétní podobě. Kontinuální (spojité) modely jsou znázorněny jako jeden celek (pizza, čokoláda, pravítko, …). Naopak diskrétní modely znázorňují izolované soubory předmětů. Ty mohou být uspořádané (bonboniéra, plato vajec, …) či neuspořádané (kuličky, bonbóny, …).

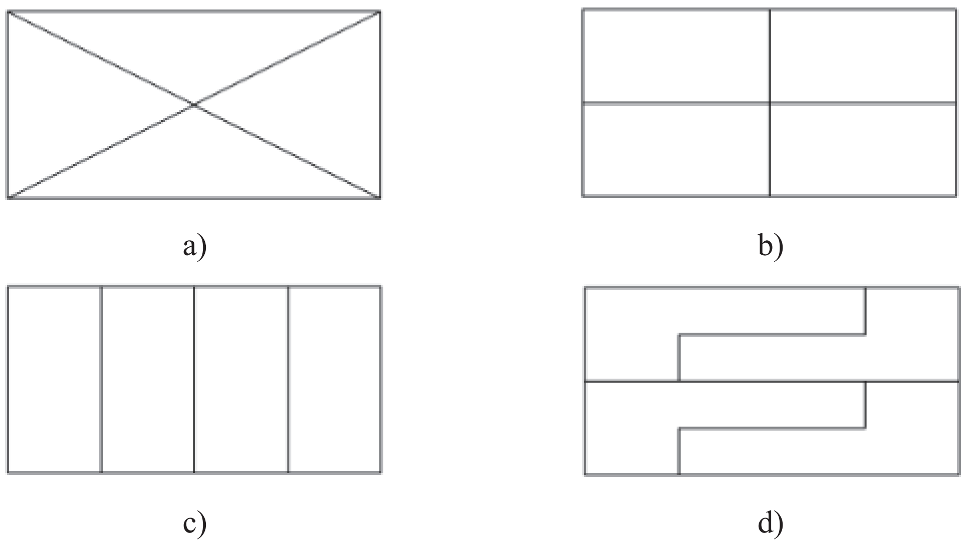
Pomocí těchto modelů by žáci měli být schopni znázornit si úlohy o zlomcích. Toto znázornění jim má při řešení úloh pomoci. Například dostane-li žák zadanou úlohu: *Zemědělec vlastní pole o tvaru obdélníku. Na jedné čtvrtině pole zaseje obilí, na polovině pole zasadí brambory. Na zbylé části pole chová koně. Na jak velké části pole chová zemědělec koně?*

V tomto případě je nereálné, abychom s žáky vyrazili podívat se na pole, kde bychom mohli danou slovní úlohu řešit. Namísto pole můžeme využít některého modelu, v tomto případě *obdélník* (papír A4), kde si žáci mohou své myšlenky zaznamenat (zakreslit), případně s modelem manipulovat (přehýbat, stříhat).

Při seznamování žáků s modely by učitelé měli postupovat obezřetně. Je velice důležité, aby učitel neupřednostňoval žádný z modelů. Modely by měly být žákům předkládány vyváženě. Žáci by se měli sami rozhodovat, který model zvolí, který „jim toho nejvíce řekne“. Model, s jehož pomocí získají nejsrozumitelnější představu o situaci, kterou právě řeší. Osvojováním si nových a nových modelů a pohlížení na ně z různých stran dojde k propojení představy dané situace s výpočtem. Pokud budou mít žáci dostatečnou zásobu modelů ve své představě, povede to k lepšímu porozumění zlomkům a následné práci s nimi.

„Ke zkvalitnění vhledu všech žáků třídy do oblasti zlomků přispívá, když stejná situace o zlomcích je uchopena, modelována a řešena pomocí pestré palety modelů a řešitelských strategií.“[11]

Nesmíme však opomenout, že pouze předkládání modelů nestačí. Je potřeba se zaměřit také na to, že vybraný model můžeme rozdělovat na části různými způsoby. Jako příklad jsem si vybrala model *obdélník*. Ten jsem rozdělila na čtyři části. Způsoby rozdělování modelu *obdélník* mohou být různé. Na obrázcích 1.4 uvádím příklady některých z nich.



Obr. 1.4: Příklady rozdělení modelu obdélníku

Příkladem může být také rozměňování peněz (mincí, bankovek) na obrázku 1.5, kde je možné sledovat, že 2 Kč mohou být různě velké části celku, záleží však na tom, co bylo základem této části (celek).

[11] Hejný, M. Představa celku a jeho části. In *Sborník příspěvků: Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let:* konference JČMF Frýdek-Místek 29. 9. – 1. 10. 1999, str. 10.

Obr. 1.5: Část celku

Uchopování vztahu celku a části je velice důležité pro rozvíjení přestav od samého počátku matematického vzdělávání a užití matematiky v praxi. Naším cílem je žákům poskytnout vhled do tohoto učiva, aby v každé situaci, příkladu či výpočtu měli oporu v daném modelu a dokázali si vše představit. To jim umožní postupovat kupředu a uvědomovat si případné chyby ve výpočtech. Žák si musí uvědomit, že část je vždy spojena s celkem.

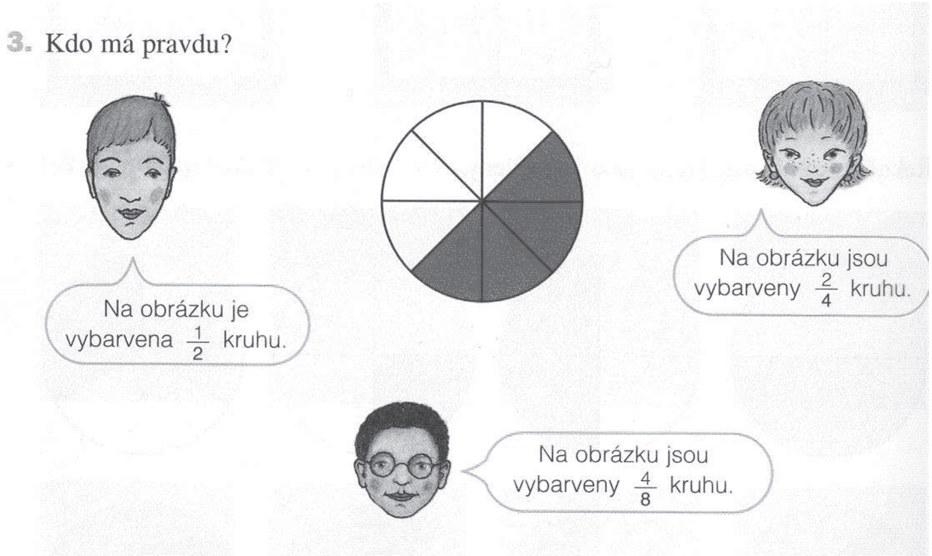
„V rozšiřování zásoby modelů je však potřeba pokračovat i ve vyšších ročnících. Žáci potřebují mít hodně příležitostí k setkávání se se zlomky v situacích z každodenního života, k získání zkušeností, k vytvoření dostatečné zásoby konkrétních modelů, z nichž některé později získávají roli modelů obecně použitelných při řešení různých úloh …

Bohužel se často setkáváme s tím, že i dokonce zkušení učitelé, ale někdy také autoři osnov a učebnic považují dlouhodobé budování představ (které je potřebné pro uchopení pojmu zlomek s porozuměním) za zbytečné a nahrazují je nácvikem kalkulu, který přináší téměř okamžitý efekt.“ [12]

[12] TICHÁ, M. MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. Společnost učitelů matematiky* JČMF [online]. 2006, str. 21 [cit. 2014-02-03]. Dostupné na WWW: <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=-1&ClanekID=188>

1.4.1 Ekvivalentnost zlomků

Během práce s modely zlomků (překládání, stříhání) si žáci mohou všímat, že některé části z celků jsou navzájem ekvivalentní. Zapisujeme to takto $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{8}{16}$. Říkáme, že zlomky tedy vyjadřují stejnou část celku (Divíšek, Buřil, a kol., 1989). Tento vztah rovnosti je možné pozorovat na obrázku 1.6 (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003). Zde můžeme hovořit o mnohonásobné reprezentaci, tedy vyjádření části z celku různými způsoby.



Obr. 1.6: Mnohonásobná reprezentace

„K představě, že existují celé množiny (nekonečné) zlomků, které vyjadřují tutéž kvantitu, se však nedospěje. … Nebudeme proto zatím příliš zdůrazňovat rovnost zlomků“[13]

[13] DIVÍŠEK, J., BUŘIL, Z., A KOL. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, str. 68. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

1.5 Dělení celku

Jak jsem se již zmínila, tak při dělení celku můžeme postupovat dvěma způsoby, a to dělením na stejné části a dělením po stejných částech.

„Český jazyk nemá pro oba typy dělení zvláštní slovo, snad bychom mohli použít rozdělování a „podělování". … Zdá se, že oba postupy jsou přítomny v intuitivních dětských postupech a děti neupřednostňují žádný z nich. Je možné dávat větší váhu potřebám školní praxe."[14]

Nyní se pomocí příkladů a znázornění obrázkem pokusím ukázat, jak chápu oba způsoby dělení. V příkladech uvádím jako model *soubor předmětů* (kuličky), ale v této části výuky považuji za velice důležité neopomíjet žádné modely – *kruh, obdélník, úsečka, soubor předmětů*. Je potřeba s nimi pracovat vyváženě a věnovat každému z nich dostatek času pro jejich zakotvení.

Uvedené obrázky čerpám z nepublikovaného interního materiálu *Celek a část v primárním matematickém vzdělávání* (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003).

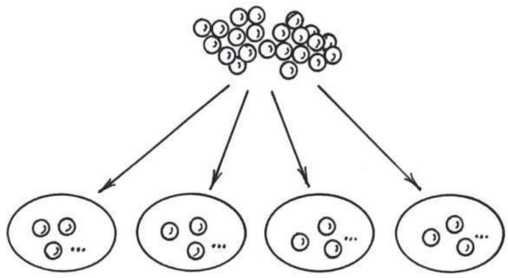
1.5.1 Dělení na stejné části

V tomto případě dělení se jedná o takzvané rozdělování.

Pro dělení na stejné části (rozdělování) jsem zvolila úlohu: *Maminka svým dětem koupila 20 kuliček na cvrnkání. Nyní je potřebuje spravedlivě rozdělit mezi své 4 děti. Kolik kuliček každé dítě dostane?*

Znázornění tohoto postupu nalezneme na obrázku 1.7 Jak je z obrázku patrné, tak každé dítě nejdříve dostane jednu kuličku a poté dostává další a další. Takto se pokračuje do té doby, než se rozdělí všech 20 kuliček.

[14] HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F., TICHÁ, M.: *Celek a část v primárním matematickém vzdělávání.* Nepublikovaný interní materiál (podklad pro workshop na konferenci SEMT 03) str. 18.



Obr. 1.7: Dělení na stejné části

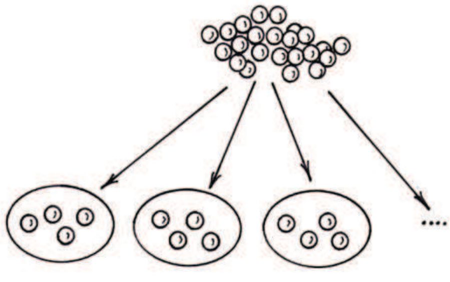
Při dělení na stejné části zjišťujeme počet prvků v každé skupině (hromádce), přičemž hromádky jsou tvořeny postupným odebíráním po jedné z celkového počtu kuliček (rozdělování) (Divíšek, Buřil, a kol., 1989).

1.5.2 Dělení po stejných částech

V tomto případě dělení se jedná o takzvané „podělování“. Divíšek mluví o dělení podle obsahu (Divíšek, Buřil, a kol., 1989).

Pro toto dělení jsem zvolila úlohu ve stejném prostředí jako v předchozím dělení: *Maminka svým dětem koupila 20 kuliček na cvrnkání. Nyní je potřebuje spravedlivě podělit mezi své děti. Maminka každému ze svých dětí dá 4 kuličky. Kolik dětí maminka podělí?*

Znázornění tohoto výpočtu nalezneme na obrázku 1.8. Zde vidíme všech 20 kuliček, od kterých postupně odebíráme (podělujeme) kuličky pro jednotlivé děti. Prvnímu dítěti dáme 4 kuličky, druhému dítěti dáme také 4 kuličky a takto pokračujeme, až rozdáme všech 20 kuliček.



Obr. 1.8: Dělení po stejných částech

Na rozdíl od předchozího dělení, kdy se zjišťuje počet prvků v každé skupině (kolik kuliček dostane každé dítě), zde zjišťujeme kolik skupin lze vytvořit (na kolik dětí se dostane). Jak je z obrázku zřejmé, zpočátku jsme nevěděli, kolik je skutečně dětí. Proto jsou na obrázku tečky, které znázorňují, že budeme tvořit další skupiny (hromádky), dokud kuličky nedojdou (Divíšek, Buřil, a kol., 1989).

1.6 Funkce zlomku

Zlomek se vyskytuje v různých funkcích. Zlomky vyjadřují kvantitativní vztah mezi celkem a jeho částí (Kuřina, Cachová, 2009).

M. Hejný uvádí: „Známe pět způsobů kvantitativního vyjádření vztahu celek – část, případně celek – části, s nimiž se setkáváme na základní škole. Každý způsob ilustrujeme jedním příkladem.

1. Přirozená čísla. Ve třídě je 27 žáků, z toho 14 dívek.
2. Poměr. Koncentrát řeďte v poměru 2:7 – na 2 l koncentrátu dát 7 l vody.
3. Zlomek. Již více než 4/5 kontaminované půdy bylo rekultivováno.
4. Desetinné číslo. Základní jmění banky bylo navýšeno o 0,583 miliard Kč.
5. Procenta. Počet kuřáků mužů v roce 1998 poklesl o 3%.“[15]

Také v práci M. Tiché a J. Macháčkové se mluví o vztahu celku a části, a jsou připojeny další interpretace: „Zpravidla se ukazuje, že zlomek vyjadřuje vztah část-celek, je ho možné chápat jako veličinu (kvantitativní údaj), jako operátor (pokyn k provedení početních operací; Hruša, Vyšín, 1964; Divíšek, 1989), míru, je jím možné zapsat podíl, poměr, …“[16]

[15] Hejný, M. Představa celku a jeho části. In *Sborník příspěvků: Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let:* konference JČMF Frýdek-Místek 29. 9. – 1. 10. 1999, str. 7.

[16] TICHÁ, M. MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. Společnost učitelů matematiky* JČMF [online]. 2006, str. 4 [cit. 2014-02-03]. Dostupné na WWW: <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=-1&ClanekID=188>

„Na prvním stupni základní školy nejsou zlomky chápány jako nová čísla. Žáci se s nimi názorně seznamují při dělení a násobení přirozených čísel. Zlomky jsou vždy spojeny s celkem, ze kterého vznikaly (např. čtvrt hodiny, polovina provazu, osmina koláče apod.). Se zlomky se neprovádějí žádné výpočty. Porovnávání zlomků, popřípadě jednoduché operace se provádějí jen na názoru. Vzhledem k těmto omezením lze učivo o zlomcích interpretovat tak, že zlomek chápeme jako charakteristiku velikosti části celku (nikoli číslo) nebo jako číselný operátor, který dané přirozené číslo (počet prvků) „přemění“ na jiné přirozené číslo (počet prvků části).“[17]

1.6.1 Zlomek jako veličina

Nejčastější interpretací zlomku, se kterou se žáci setkávají, je slovní podoba zlomku využívána jako číselná, kvantitativní hodnota dané veličiny. Zlomek ve vztahu celku a části, v podobě veličiny, je pro žáky zkušenost, se kterou se již setkali a mají v tomto případě zabudovanou představu, na které lze stavět a pracovat s ní.

Představa může být v podobě objektů jako je koláč, lahev s vodou, papír, čokoláda, pole … V tomto případě již pracujeme s velikostí daných objektů (tedy kvantitativní hodnotou), to znamená s čísly, která jsou opatřena jednotkou (litr, decimetr, hektar, …) (Hošpesová, Kuřina, Tichá, 2003).

Příklad:

- *V kině si koupíme půllitru limonády.*
- *Zemědělec vlastní tři čtvrtě hektaru pole.*

Důležitým předpokladem k tomu, aby žáci mohli pracovat se zlomkem jako s veličinou, je nutné seznámit je se základními fyzikálními jednotkami, které budou při své práci potřebovat. Zvláště se jedná o fyzikální jednotky délky (kilometr, metr), času (hodina, minuta), hmotnosti (kilogram, gram). Jako příklad jsem zvolila ty fyzikální jednotky, se kterými se na prvním stupni základní školy setkáváme nejčastěji. Bez těchto znalostí by

[17] DIVÍŠEK, J., BUŘIL, Z., A KOL. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, str. 65. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

nebylo možné se zlomkem v podobě kvantitativního údaje u veličiny plnohodnotně pracovat.

Jak jsem uvedla, ukazuje se, že postupné uchopování pojmu zlomek je náročné také na čas. To se do značné míry týká seznamování se s některými fyzikálními jednotkami, se kterými budou žáci pracovat. Opět musíme počítat s tím, že se znalosti jednotlivých žáků budou značně lišit. Je tedy potřebné, aby se jejich znalosti dostaly na alespoň přibližně stejnou úroveň.

Zvláště se musíme vyrovnat s faktem, že v tomto případě může budování pojmu zlomek trvat skutečně dlouhou dobu a výsledky nejsou znatelné po několika hodinách, ale až po delším časovém úseku. A ani tehdy není jisté, že žák zlomkům skutečně rozumí a učitelovo úsilí ne vždy odpovídá získaným poznatkům (Tichá, Macháčková, 2006).

1.6.2 Zlomek jako číselný operátor

Dále se žáci na prvním stupni základní školy setkávají se zlomkem jako operátorem.

„Chápeme-li zlomek jako operátor, pak to znamená, že se na něj díváme jako na jakýsi „matematický stroj“ (soubor instrukcí), který z daného přirozeného čísla vytvoří jiné přirozené číslo. Jeho činnost je přesně popsána matematicky a skládá se ze dvou elementárních početních výkonů.“ [18]

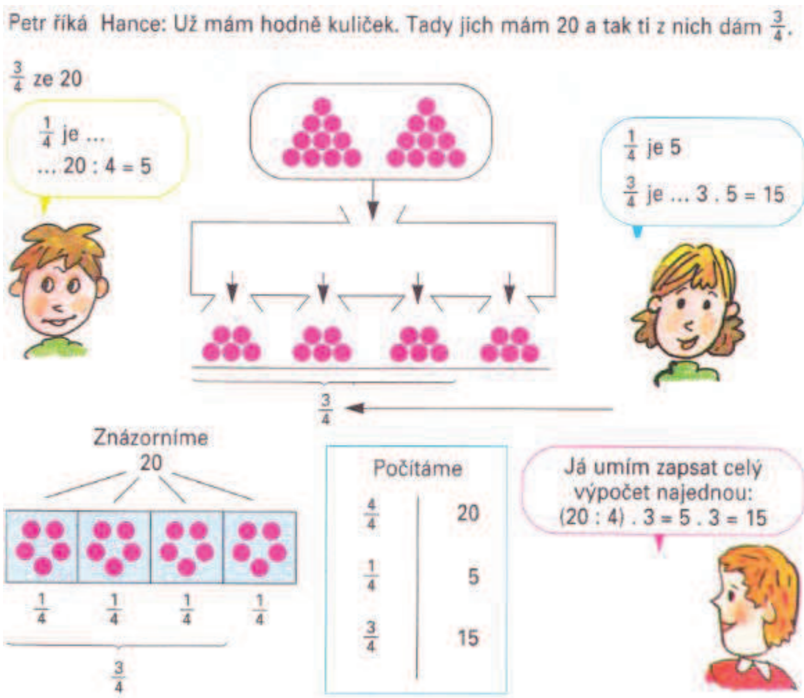
Takovýto „matematický stroj“ můžeme chápat jako pokyn sledu prováděných operací (výpočtů), které žák musí učinit, než se dostane ke konečnému výsledku. Tento matematický stroj umožňuje řešit dva typy úloh, v závislosti na tom, co chceme zjistit. První úloha řeší určení části celku, druhá určení celku z dané části. Jako příklad ke každému typu úloh předkládám slovní úlohu.

Tyto slovní úlohy jsem čerpala z učebnice Matematika pro 5. ročník základní školy, kterou vydal Matematický ústav AV ČR, autorů M. Koman, F. Kuřina a M. Tichá. V této učebnici nalezneme příklady, včetně znázornění „počítacím strojem“, které

[18] DIVÍŠEK, J., BUŘIL, Z., A KOL. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, str. 70-71. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

žákům umožní uvědomit si, jaké početní operace je potřeba provést, než se dostanou k danému výsledku.

První úloha je zaměřena na určení části z celku. Postupy řešení této úlohy je možné sledovat na obrázku 1.9. Jsou zde ukázány různé možnosti vizualizace i výpočtů (počítací stroj, výpočet přes jednotku, výpočet „najednou“ s využitím závorek). Jak je z obrázku patrné, žák si nejprve musí uvědomit, co je celek (20 kuliček). Poté celek rozdělí na 4 části (hromádky), čímž zjistí velikost jednotlivých částí (počet kuliček v jednotlivých hromádkách). Jakmile zná velikost jednotlivých částí, může dopočítat, jak velkou část tvoří $\frac{3}{4}$ z celku (celkového počtu kuliček).



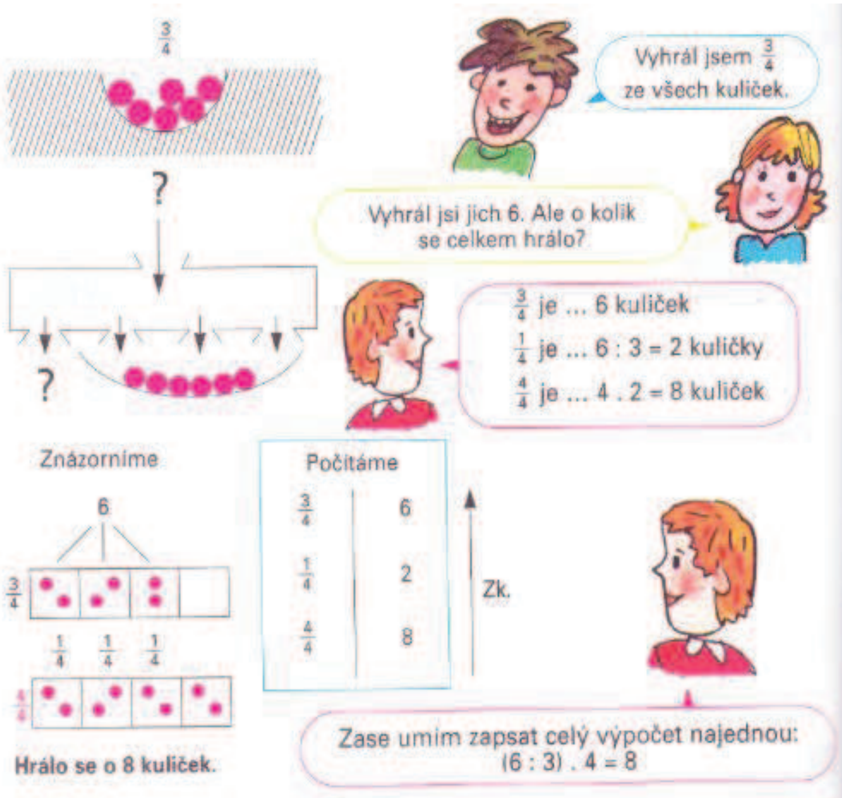
Obr. 1.9: Určení části z celku

Na obrázku 1.10 vidíme druhou úlohu, která je zaměřena na určení celku z dané části. I zde jsou ukázány různé možnosti vizualizace i výpočtů (počítací stroj, výpočet přes jednotku, výpočet „najednou“ s využitím závorek). Tato úloha je formulována ve formě rozhovoru chlapce a dívky.

Chlapec: *„Vyhrál jsem $\frac{3}{4}$ ze všech kuliček.“*

Dívka: *„Vyhrál jsi jich 6. Ale o kolik se celkem hrálo?“*

Žák si musí nejprve uvědomit, že 6 kuliček tvoří $\frac{3}{4}$ z celku, nikoli celek. Dané kuličky rozdělí na 3 části (3 shodné hromádky), kdy zjistí velikost jedné části (počet kuliček v jedné hromádce). Jakmile zná velikost jedné části, může dopočítat, jak velký byl celek na počátku (kolik bylo kuliček celkem).



Obr. 1.10: Určení celku z dané části

Tomuto procesu je nutné věnovat dostatek času. Dokud žáci jednotlivým krokům a pojmům dostatečně neporozumí, tak postupy „motají" dohromady. Je důležité, aby si uvědomovali, co je v konkrétním případě celek. Zda z celku vychází, či celek zjišťují.

Jak jsem již naznačila, častou chybou, které se žáci dopouštějí, je neuvědomění si celku. Jakmile je v zadání úlohy uvedené přirozené číslo, pak pro ně udává celek. Příkladem mohou být tyto úlohy:

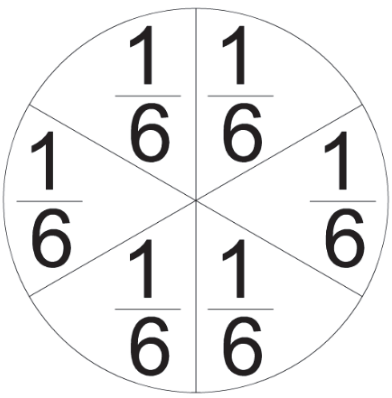
- *Ve třídě je 20 žáků a* $\frac{4}{5}$ *z nich chodí na angličtinu. Kolik žáků chodí na angličtinu?*
- *20 žáků chodí na zpěv. Jsou to* $\frac{4}{5}$ *z celkového počtu žáků. Kolik je ve třídě žáků?*

V obou případech žáci často vidí 20 jako celek a $\frac{4}{5}$ jako operátor. To je velmi častá chyba – pokud je v testu (zadání úlohy) zlomek a přirozené číslo, pak přirozené číslo interpretují jako celek a zlomek jako operátor (pokyn k výpočtu).

Pokud se zlomku jako číselnému operátoru dostatečně nevěnujeme a nesnažíme se naznačené chyby odstranit, mohou ve vyšších ročnících vést k nepochopení navazujícího učiva a činit nemalé potíže.

1.7 Kmenové zlomky

Zvláštní pozornost je potřebné věnovat kmenovým zlomkům. S kmenovými zlomky se žáci setkávají ještě před tím, než se seznámí s pojmem zlomek. Jedná se o jednu z prvotních zkušeností v hodinách matematiky, kdy žáci nevědomky pracují s částí z celku. A to tak, že celek dělí na stejný počet shodných částí. Takovéto rozdělování je znázorněno na obrázku 1.11, kde vidíme celek (kruh), který je rozdělen na šest shodných částí. Kmenový zlomek je tedy takový zlomek, který má v čitateli číslo 1, tedy zlomek ve tvaru $\frac{1}{n}$. S pojmem kmenové zlomky žáky neseznamujeme.

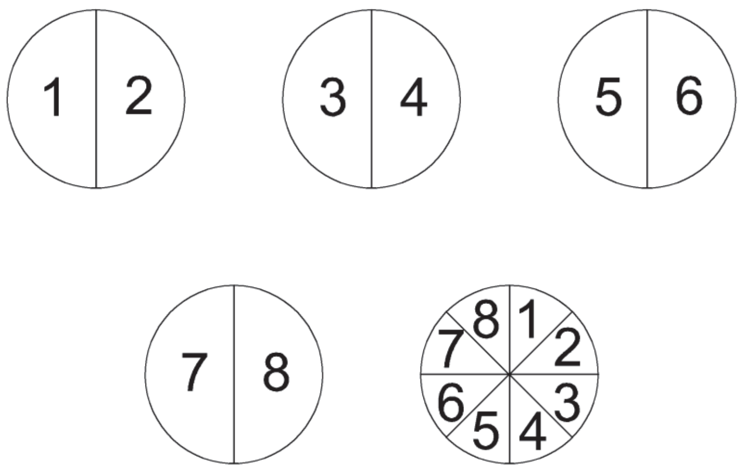


Obr. 1.11: Rozdělení celku na shodné části

1.7.1 Historie

Jako motivace pro žáky, kteří začínají s dělením celku na stejné části, mohou sloužit poznatky z historie. S kmenovými zlomky totiž počítali již staří Egypťané, kteří spravedlivě dělili m chlebů mezi n podílníků. Jediným nekmenovým zlomkem, se kterým pracovali, byly $\frac{2}{3}$.

V Egyptě se matematika jako samostatná disciplína rozvíjela již od 4. tisíciletí před naším letopočtem. Počítání se zlomky vycházelo z konkrétních příkladů. Kdybychom měli úlohu *„rozděl 5 chlebů mezi 8 podílníků"* tak bychom ji vyřešili okamžitě, jelikož na každého padne $\frac{5}{8}$ chleba. Pro egyptské písaře takové řešení neexistovalo, protože oni pracovali pouze s kmenovými zlomky (tedy zlomky ve tvaru $\frac{1}{n}$ a $\frac{2}{3}$) a zápisu $\frac{5}{8}$ by neporozuměli. Podle egyptských písařů by rozdělení $\frac{5}{8}$ vypadalo takto $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$, toto rozdělení je možné vidět na obrázku 1.12. Rozdělit 5 chlebů mezi 8 podílníků tak, aby každý dostal svůj podíl v jednom celku je nereálné. Proto egyptští písaři nejdříve rozdělili chleba na $\frac{1}{2}$, aby každý z podílníků dostal co největší část z celku. Na polovinu rozdělili 4 chleby. Zbylý chléb poté rozdělili na osminy, kdy každý z podílníků dostal $\frac{1}{8}$ (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).



Obr. 1.12: Dělení chleba podle egyptských písařů

Egypťané byli a jsou považováni za vyspělou civilizaci, jak je tedy možné, že tato civilizace více než 1000 let pracovala pouze s kmenovými zlomky a vývoj zlomku na tak dlouhou dobu ustrnul? Odpověď na tuto otázku je naznačena v publikaci Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky (2004):

„Není to náhodou tak, že z hlediska vývoje není pojem kmenového zlomku přechodové stádium, ale důležitá vývojová etapa? Je-li tomu tak – a my jsme přesvědčeni, že tomu tak je -, pak je potřebné zásadní přehodnocení koncepce výuky zlomků. Navrhovaná koncepce by se od stávající lišila zejména v tom, že by kmenový zlomek chápala jako nosný pojem, kterému je nutno věnovat dostatek času i pozornosti.“[19]

1.8 Závěr teoretické části

V úvodu teoretické části jsem se zaměřila na kurikulární dokumenty. Ukázala jsem v nich, jak je v současné době učivo o zlomcích rozloženo do učiva základní školy a s jakými znalostmi by žák měl přecházet na druhý stupeň základní školy. Dále uvádím propojení učiva o zlomcích s konkrétními zkušenostmi z reálného světa, se kterými žák přichází již do mateřské školy, kde si toto učivo děti nevědomky rozšiřují a posléze do základní školy. Zde by na tyto znalosti měli navázat učitelé, jelikož pracovat se znalostmi žáků je pro ně nejpřínosnější.

Při této práci bychom neměli zapomínat na různé reprezentace, které nám pomohou systematicky rozvíjet pozornost žáků. Prvotním krokem je vlastní činnost, kdy žáci mají možnost manipulovat s různými předměty, čímž si rozšiřují své obzory. Od činnosti se postupně přechází k ikonickému zobrazení, kdy žáci pro své činnosti hledají vhodné znázornění, které má za úkol urychlit jejich práci. Během celé práce je důležité, aby se žáci o svých krocích slovně vyjadřovali, což podporuje jejich myšlenkové pochody. Během těchto reprezentací žáci pracují s různými modely, které by jim měly být v dostatečném množství předkládány. S těmito modely manipulují, učí se je dělit na části či po částech. Začínají pracovat se slovním vyjádřením zlomku jako veličinou, kdy

[19]HEJNÝ, M.: Zlomky. In Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Vondrová. (Ed.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 2. díl, Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, Praha, 2004, str. 348. ISBN 80-7290-189-31.

je slovní podoba zlomku využívána jako kvantitativní hodnota dané veličiny. Seznamují se s prvními kmenovými zlomky, které vychází již z historie starých Egypťanů. Jakmile si žáci projdou všemi těmito činnostmi, dostávají se k symbolickému zápisu zlomku. S využitím symbolického zápisu poté řeší první matematické úlohy se zlomky, ať už v podobě veličiny či operátoru.

Se všemi těmito znalostmi by se žáci měli seznámit na prvním stupni základní školy, aby byli dobře připraveni na druhý stupeň základní školy.

2 PRAKTICKÁ ČÁST

Dlouho jsem se rozmýšlela, jakým směrem se ve své praktické části ubírat. Na začátku jsem si kladla tyto otázky:

- **Jaké jsou znalosti žáků v oblasti učiva o zlomcích?**
- **Co žáci umí?**
- **Odpovídají znalosti žáků poznatkům uvedeným v teoretické části?**
- **Jsou jejich znalosti o zlomcích rozvíjeny vyváženě?**

K tomu, abych mohla na otázky nalézt odpovědi, bylo potřeba vybrat vhodnou metodu. Nejdříve jsem si musela ujasnit, jaká výzkumná metoda bude nejvhodnější pro práci s žáky (uvědomuji si, že metody výzkumu se vyvíjejí). Nejefektivnější se mi jevila metoda smíšeného výzkumu, kdy se prolíná kvalitativně a kvantitativně orientovaný výzkum.

Smíšený výzkum podle pedagogického slovníku:

„Při aplikacích metod kvantitativního výzkumu a kvalitativního výzkumu v sociálních vědách se dospělo k poznání, že je optimální tyto metody vzájemně kombinovat. To se týká jak sběru dat, tak jejich zpracování a interpretace.“[20]

Pojmům kvalitativní a kvantitativní výzkum rozumím tak, jak je vymezuje P. Gavora ve své knize Úvod do pedagogického výzkumu:

Kvalitativní výzkum je takový výzkum, kde svá zjištění uvádíme ve slovní (nečíselné, nekvantifikované) podobě. Jde tedy o popis toho, co jsme během svého zkoumání vypozorovali, ať již během prováděného zkoumání či při procházení získaných materiálů. Podle P. Gavory výsledky kvalitativního výzkumu není možné aplikovat obecně. Cíle, které si během výzkumu stanovujeme, nejsou konečné, na základě nových zjištění se mění (ovlivňují je nová zjištění), a proto se během celého výzkumu upravují.

Kvantitativní výzkum pracuje především s číselnými údaji (například množství, frekvence jevů, atd.), které jsou přehledně zaznamenány (tabulky, grafy, atd.). Cíle

[20] PRŮCHA, J. WALTEROVÁ, E. MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál 2013, str. 267. ISBN 978-80-262-0403-9.

tohoto výzkumu se nemění a získané výsledky je možné aplikovat obecně, platí tedy pro vybraný vzorek populace (Gavora, 2000).

V praktické části se tyto metody vzájemně prolínají. To znamená, že uspořádám zjištěná data (kvantitativně) do tabulky a udám počty. Zjištění poté okomentuji a srovnám s teoretickými znalostmi, která jsem zpracovala v teoretické části. Budu moci zodpovědět otázky: „Kolikrát se vyskytly pozorované jevy? Co a proč mohlo být příčinou?“

Praktická část je rozdělena do dvou částí: předvýzkum a výzkum, který je rozdělen na další dva na sebe navazující výzkumy. Každá jednotlivá část předvýzkumu i výzkumu obsahuje zhodnocení zjištěných výsledků, zároveň tato zjištění vedou k formulaci kroků pro následný výzkum.

Prvním krokem byl předvýzkum. Jako studentka pedagogické fakulty jsem se během studia seznámila s očekávanými výstupy vzdělávacího obsahu oboru *Matematika a její aplikace* (RVP ZV) v jednotlivých ročnících, ale to především teoreticky, nikoli prakticky. Stejné je to i s učivem o zlomcích, kdy jsem se v teoretické části seznámila s propedeutikou zlomků. S tím, jaká je skutečná znalost tohoto učiva na prvním stupni základní školy, zatím nemám mnoho vlastních zkušeností. Právě proto jsem se rozhodla začít malou sondou do tohoto prostředí, tedy předvýzkumem. Během něj jsem žákům položila otázky, které mi měly odpovědět na to, jaké představy o zlomcích mají žáci ve 3. a 5. ročníku základní školy. Při třídění odpovědí, které se mi od žáků dostaly, jsem narazila na opakující se jevy.

Ve druhém kroku pokračuji výzkumem. Tento výzkum vychází z předchozích zjištění předvýzkumu, který mi pomohl udělat si obrázek a ujasnit si očekávání. První část výzkumu měla potvrdit nebo naopak vyvrátit předchozí závěry. K tomu bylo nutné oslovit mnohem početnější skupinu respondentů. I v tomto případě se vyskytly stejné jevy a potvrdily se závěry předvýzkumu. To mě přivedlo k položení nových otázek, na které je zaměřena druhá část výzkumu. Zjištěné skutečnosti jsem vždy shrnula a formulovala závěry.

2.1 Předvýzkum

Cílem předvýzkumu bylo:

- zjistit, jakou představu o zlomcích mají žáci 3. ročníku základní školy (8 - 9 letí) ještě předtím, než je učivo o zlomcích zařazeno do výuky.
- zjistit, jakou představu o zlomcích mají žáci 5. ročníku základní školy (10 – 11 letí), kteří již učivo o zlomcích mají zařazené do výuky.

Pro svůj předvýzkum jsem se inspirovala publikací *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice*[21]*,* jejímiž autorkami jsou M. Tichá a J. Macháčková. Z této publikace jsem vybrala následující dvě otázky, které mi měly pomoci zjistit, jaké představy o zlomcích žáci mají:

1. **Napiš nebo nakresli, co si představíš, když se řeknu slovo ZLOMEK.**
2. **Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli $\frac{3}{4}$.**

Otázky jsem položila v ZŠ Na Dědině v Praze ve 3. a 5. ročníku, kde předmět matematiku vyučuje stejná paní učitelka. Nejdříve jsem otázku položila v 5. ročníku, kde bylo přítomno 22 žáků a později ve 3. ročníku, kde bylo přítomno 18 žáků. V obou třídách jsem položila otázky v hodině matematiky.

2.1.1 Průběh předvýzkumu

Úkoly jsem v obou případech formulovala stejným způsobem. Nikdy jsem se však nezmínila o matematice, ani o pojmu zlomek.

Před samotnou prací jsem v každé třídě rozdala čisté papíry, na které žáci měli zapisovat své odpovědi. Žáci byli v obou třídách upozorněni, že se nejedná o žádný test. Požádala jsem je, aby pracovali samostatně, jelikož důležitá je jejich odpověď, nikoli odpověď spolužáka. Poté jsem začala se zadáváním otázek.

[21] TICHÁ, M. MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. Společnost učitelů matematiky* JČMF [online]. 2006, [cit. 2014-02-03]. Dostupné na WWW: <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=-1&ClanekID=188>

Nejprve jsem žáky požádala, aby se na daný list podepsali. Vysvětlila jsem jim, že jejich podpis nepotřebuji pro kontrolu jejich práce, ale proto, kdybych nějakou odpověď nemohla přečíst či nepoznala, co nakreslili, tak abych se jich poté mohla osobně doptat.

Žáky jsem požádala, aby zapsali na první stránku číslo 1, které dali do kroužku. Toto číslo značilo číslo otázky. Poté jsem položila první otázku: *„Napiš nebo nakresli, co si představíš, když řeknu slovo zlomek."* Někteří žáci se pustili okamžitě do práce, ale někteří stále přemýšleli. Jelikož jsem si nebyla jistá, zda všichni žáci pozorně slyšeli, zopakovala jsem otázku znovu.

Abych věděla, kolik žáků ještě pracuje na své odpovědi, požádal jsem ty, co už dopsali, aby odložili pero a otočili papír. Podle toho jsem poznala, kolik žáků ještě potřebuje čas na práci. Jakmile jsem viděla, že všichni otočili papír, pokračovala jsem v zadání druhé otázky.

Odpověď na další otázku žáci psali na druhou stranu papíru, kam si zapsali číslo 2 a dali ho do kroužku, což značilo druhou otázku. Žáci byli upozorněni na to, že při druhé otázce se již nesmějí vracet k první otázce a cokoli tam opravovat. Poté jsem položila druhou otázku: *„Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli tři čtvrtiny."* Při zadání jsem na tabuli současně zapsala „$\frac{3}{4}$“. Stejně jako první otázku jsem i tuto ještě jednou zopakovala. Opět jsem požádala, aby ti, kteří svou práci dokončili, odložili pero.

Jakmile jsem viděla, že odpověděla většina třídy, začala jsem žáky postupně obcházet a jejich odpovědi si vybírat. Poté jsem žákům poděkovala za jejich spolupráci a se třídou se rozloučila.

Celé zadání nikdy netrvalo dlouho a nijak jsem čas ve třídě neprodlužovala. V obou třídách jsem strávila vždy přibližně 10 – 15 minut.

2.1.2 Očekávané výpovědi

Na základě poznatků z teoretické části práce a faktu, že tito žáci pracují s učebnicemi nakladatelství Fraus (přístupy profesora Hejného), kde se s propedeutikou zlomků setkáváme od 1. ročníku, předpokládala jsem tyto výpovědi na položené otázky:

3. ročník:

- 1. otázka: Většina žáků si slovo zlomek nespojí s učivem o zlomcích, jelikož slovo zlomek se do 3. ročníku nevyskytuje. Žáci nebudou tímto směrem nikterak ovlivněni.
- 2. otázka: Předpokládám, že část žáků si $\frac{3}{4}$ propojí s reálnými situacemi (například $\frac{3}{4}$ hodiny). Během zadání otázky sice napíši na tabuli symbolický zápis zlomku ($\frac{3}{4}$), se kterým se doposud nesetkali, ale současně vyslovím „tři čtvrtiny“, žáci své odpovědi zaznamenají především obrázky.

5. ročník:

- 1. otázka: Většina žáků si slovo zlomek propojí s učivem o zlomcích, kdy žáci své odpovědi znázorní pomocí obrázků rozdělených na části.
- 2. otázka: Předpokládám, že žákům nebude činit potíže vybrat si z modelů zlomků, které by měli mít zabudovány ve svých představách, a pro znázornění $\frac{3}{4}$ zvolí především obrázek, podle jejich názoru nejvhodnější, na kterém $\frac{3}{4}$ vyznačí.

2.1.3 Zjištěné výsledky – 1. otázka

Nejdříve jsem začala s tříděním odpovědí na první otázku: *Napiš nebo nakresli, co si představíš, když se řekne slovo zlomek.*

Během procházení všech získaných prací jsem sledovala určité opakující se jevy, podle kterých jsem výpovědi žáků třídila. Dané jevy jsem si označila jako kritéria, která určují skupinu, do které jsem odpověď žáků zařadila. Toto třídění jsem nazvala jako **třídění podle charakteristik** činností, které vystihují jednotlivé skupiny výpovědí. Pro první otázku jsem si stanovila tato kritéria:

- **spojení s výrazem zlomený;**
- **slovní vyjádření části celku;**
- **krájení koláče;**

- **spojení s vyučovacím předmětem matematika;**
- **symbolický zápis zlomku;**
- **ostatní.**

Pro jasnější představu o jednotlivých kritériích jsou v dalším textu uvedeny jejich ilustrace obrázkem a podrobnějším popisem.

Vyskytly se i takové práce, které do žádného z mnou stanovených kritérií nespadaly, nebo žák neodpověděl a odevzdal čistý list. Takovéto odpovědi jsem zařadila do skupiny ostatní.

Pro přehlednost jsem odpovědi žáků utřídila do tabulky 2.1. Zde je možné vidět počty odpovědí v jednotlivých ročnících.

Tabulka 2.1: Předvýzkum - 1. otázka

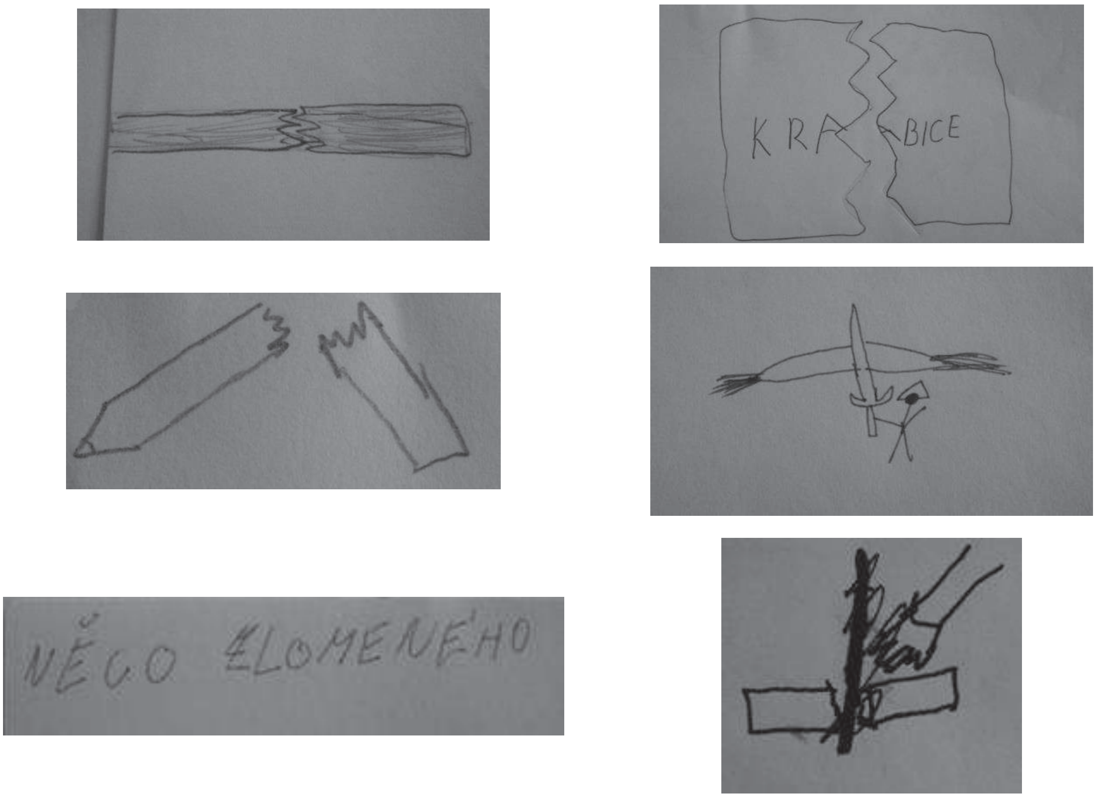
Třídění podle charakteristik	Spojení s výrazem zlomený	Slovní vyjádření části celku	Krájení koláče	Spojení s vyučovacím předmětem matematika	Symbolické zápisy zlomku	Ostatní
3. ročník	12	3	0	3	0	1
5. ročník	8	1	4	0	9	0
Celkem	18	4	4	3	10	1

<u>Ilustrace odpovědí a komentáře k nim</u>

- **Spojení s výrazem zlomený**

V obou třídách se nejčastěji vyskytoval obrázek naznačující něco zlomeného, například tužka, hranol, krabice, noha. Překvapilo mě, že tato odpověď byla silně zastoupena ve 3. i 5. ročníku. Ve 3. ročníku jsem tento typ odpovědí očekávala, jelikož žáci se slovem zlomek doposud nesetkali, ale v 5. ročníku jsem takovéto typy odpovědí nečekala.

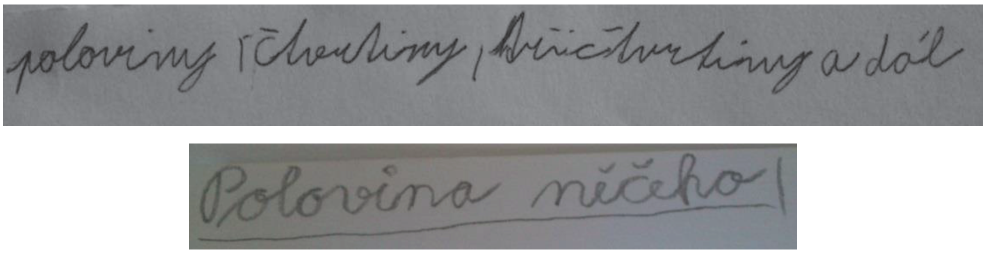
Zvláště pokud žáci mají zkušenosti s učivem o zlomcích a úkol byl zadán v hodině matematiky.



Obr. 2.1: Spojení s výrazem zlomený

- **Slovní vyjádření části celku**

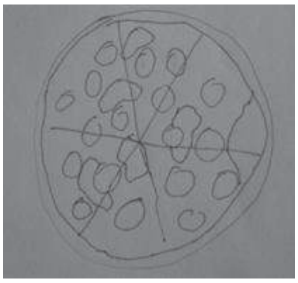
V odpovědích se vyskytovalo slovní vyjádření části celku, například půlka, polovina. Tento typ odpovědí jsem očekávala, jelikož se slovním vyjádřením části celku se žáci setkávají již v předškolním věku. Přesto mě překvapilo, že slovní vyjádření části celku použili i žáci 3. ročníku. Žáci, kteří se se slovem zlomek, ve slovním vyjádření části celku, během výuky nesetkali.

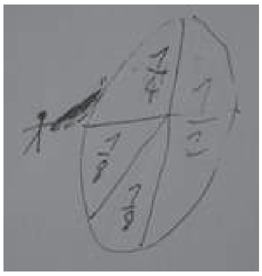


Obrázek 2.2: Slovní vyjádření části celku

- **Krájení koláče**

Mezi odpověďmi se vyskytoval model *kruh* (obrázky koláče, pizzy), který byl rozdělen na části. Tyto odpovědi se vyskytovaly pouze v 5. ročníku. Zde mě zaujalo, že žáci si pro znázornění zlomku vybírali *pouze model kruh*. Ale i to, že pro znázornění zlomku obrázkem se rozhodlo tak málo žáků.

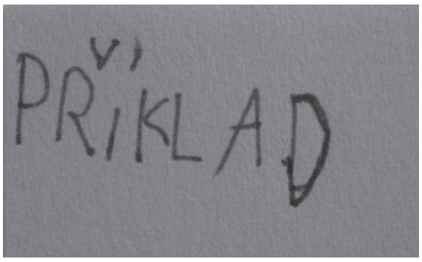


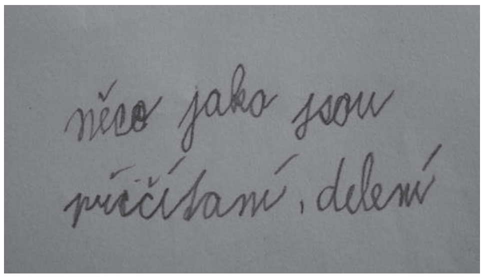


Obrázek 2.3: Krájení koláče

- **Spojení s vyučovacím předmětem matematika**

Dále bylo slovo zlomek spojováno s vyučovacím předmětem matematika a to pouze ve 3. ročníku. Předpokládám tedy, že tito žáci si již uvědomují propojení slova zlomek s matematickými operacemi.

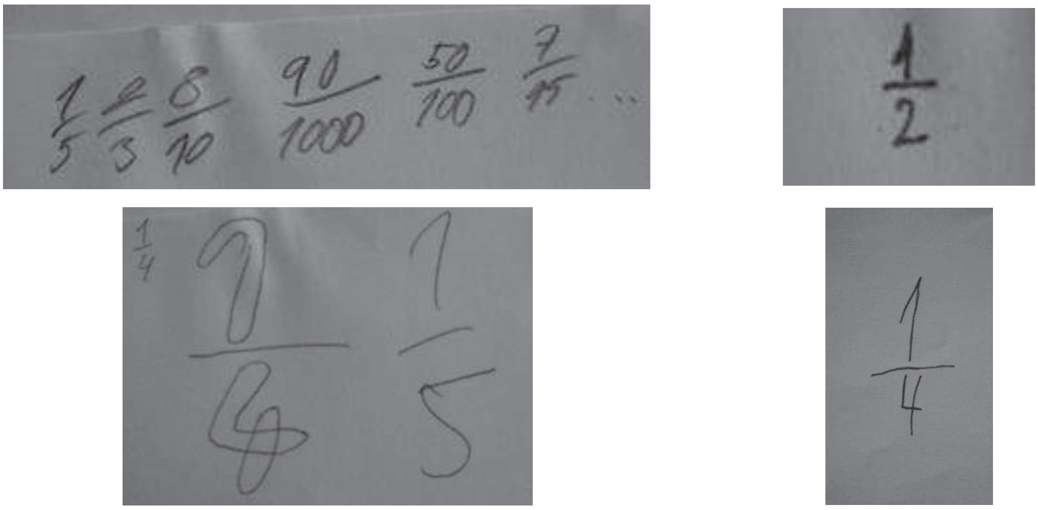




Obrázek 2.4: Spojení s vyučovacím předmětem matematika

- **Symbolický zápis zlomku**

Symbolické zápisy zlomku, především kmenového zlomku, se začaly objevovat až v 5. ročníku, kdy se již žáci, na rozdíl od 3. ročníků, se symbolickým zápisem zlomku setkali.



Obrázek 2.5: Symbolický zápis zlomku

2.1.4 Zjištěné výsledky – 2. otázka

Jakmile jsem byla hotova s tříděním odpovědí na první otázku, zaměřila jsem se na odpovědi na druhou otázku: *Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli* $\frac{3}{4}$.

Obdobně jako u první otázky i zde jsem sledovala opakující se jevy a stanovila jsem si kritéria, podle kterých jsem získané práce žáků třídila. Ukázalo se, že kritérií, která bych si u této otázky mohla stanovit, je více. Proto jsem se rozhodla odpovědi nejdříve roztřídit, stejně jako v předchozí otázce, **podle charakteristik** činností. Poté jsem dala všechny odpovědi dohromady a zaměřila jsem se na jiné opakující se jevy. Zde jsem si jako kritérium stanovila třídění **podle modelů**.

Třídění podle charakteristik

V této otázce jsem zvolila jiná kritéria třídění, než v předchozím třídění podle charakteristik. A to proto, že žákům jsem položila jinou otázku, na kterou žáci odpovídali jinými charakteristickými činnostmi než v řešení předchozí úlohy. Pro třídění podle charakteristik činností, jsem si u druhé otázky stanovila tato kritéria:

- **spojení s vyučovacím předmětem matematika;**
- **spojení s ciferníkem hodin;**
- **spojení s pojmem zlomek;**
- **znázornění obrázkem (schéma);**
- **ostatní.**

Pro jasnější představu o jednotlivých kritériích jsou níže uvedeny jejich ilustrace obrázkem a podrobnějším popisem.

Při tomto třídění jsem narazila na práce, kde byla odpověď na jednu otázku ve více podobách a tyto práce bylo možné zařadit podle více kritérií. Práce jsem proto zařadila do více než jedné skupiny. Z tohoto důvodu je počet odpovědí větší, než počet respondentů. I zde se vyskytovaly práce, které nespadaly do žádných z mnou stanovených kritérií, proto jsem je zařadila do skupiny ostatní.

Pro přehlednost jsem odpovědi žáků utřídila do tabulky 2.2. Je v ní možné pozorovat, počty odpovědí v jednotlivých ročnících.

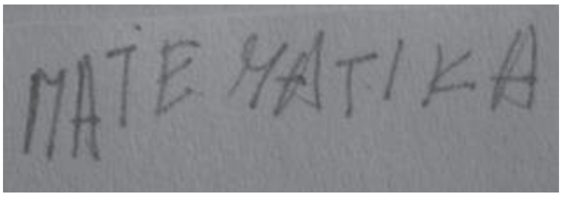
Tabulka 2.2: Předvýzkum - 2. otázka, třídění podle charakteristik

Třídění podle charakteristik	Spojení s vyučovacím předmětem matematika	Spojení s ciferníkem hodin	Spojení s pojmem zlomek	Znázornění obrázkem (schéma)	Ostatní
3. ročník	1	1	0	14	2
5. ročník	1	1	5	16	2
Celkem	2	2	5	31	4

<u>Ilustrace odpovědí a komentáře k nim</u>

- **Spojení s vyučovacím předmětem matematika**

Stejně jako v předešlé otázce se našly odpovědi, které odkazovaly na vyučovací předmět matematika.



Obrázek 2.6: Spojení s vyučovacím předmětem matematika

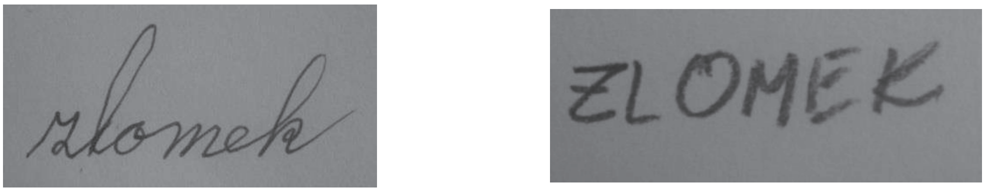
- **Spojení s ciferníkem hodin**

V pracích se mimo jiné vyskytl obrázek hodin. Jelikož se žáci učí poznávat hodiny od 1. ročníku a hodiny se nacházejí v každé třídě, na chodbách a každý z nás má zajisté nějaké hodiny doma, očekávala jsem, že se tato odpověď vyskytne častěji. Myslím si, že důvodem, proč se dané spojení vyskytlo pouze ve dvou případech, může být spojeno s tím, že žáci mnohem méně nosí klasické hodinky s ciferníkem, které jsou nahrazeny digitálními hodinkami a mobilními telefony. Dalším důvodem, proč nedošlo k propojení s časem, může být i fakt, že během zadávání jsem na tabuli napsala $\frac{3}{4}$, které jsem současně vyslovila „tři čtvrtiny“, nikoli tři čtvrtě, na což jsou žáci ve spojení s časem zvyklí.

Obr. 2.7: Spojení s ciferníkem hodin

- **Spojení s pojmem zlomek**

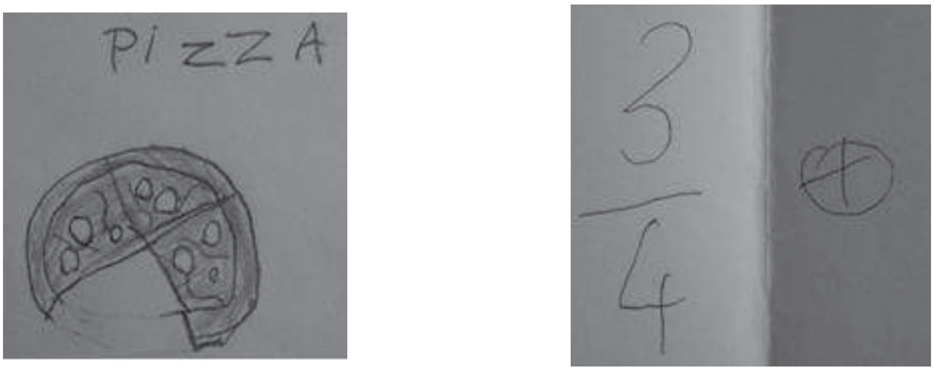
Všimla jsem si, že žáci jsou velice předvídaví. Na základě první otázky odvozovali, že $\frac{3}{4}$ je právě onen zlomek, na který jsem se ptala v předchozí otázce. A právě to zaznamenávali ve svých odpovědích. Myslím si, že pokud bych před touto otázkou nepoložila otázku: „Napiš, nebo nakresli, co si představíš, když řeknu slovo zlomek.“, tak by se tato odpověď nevyskytla v tolika případech.



Obr. 2.8: Spojení s pojmem zlomek

- **Znázornění obrázkem (schéma)**

Do této skupiny odpovědí jsem zařadila všechny odpovědi, které byly znázorněny obrázkem. To znamená i ty obrázky, které byly rozděleny na více než 4 části, případně byl vyznačen jiný počet částí, než jaké bylo uvedeno v zadání. Nikterak mě nepřekvapilo, že tato skupina byla nejpočetnější skupinou, jelikož s rozdělováním celku na části se žáci v začátcích setkávají nejčastěji. Objevily se však obrázky, které upozorňují na nepochopení – celek je rozdělený na nestejné části.



Obr. 2.9: Znázornění obrázkem

<u>Třídění podle modelů</u>

Jak jsem již uvedla, možností pro třídění odpovědí je více. Oporou pro toto třídění mi bylo předchozí třídění podle charakteristik činností, kde převládalo znázornění obrázkem. Během procházení obrázků jsem si všimla, že znázornění obrázkem se liší podle toho, který model si žáci pro znázornění vybrali. Toto třídění jsem tedy nazvala jako **třídění podle modelů.** Jak jsem již uvedla v teoretické části, modelem může být **kruh, obdélník, úsečka, soubor předmětů**. Proto jsem si jako kritérium třídění stanovila právě tyto modely. A to podle toho, který model byl pro znázornění zlomku $\frac{3}{4}$ použit. Mezi modely jsem zařadila i ty odpovědi, které jsou chybné (to znamená takové modely, které jsou rozděleny na více částí, než jaké udává zadání, části nejsou stejné, případně není vyznačen určený počet částí), ale jejich základem je daný model. Někteří žáci pro znázornění použili více, jak jeden z modelů. V tomto případě jsem započítala každý model zvlášť. Odpovědi, které nereprezentovaly mnou stanovené kritérium, jsem zařadila do skupiny ostatní. Pro jasnější představu o jednotlivých kritériích, jsou níže uvedeny jejich ilustrace obrázkem a podrobnějším popisem.

V tabulce 2.3 je možné pozorovat, v jakém zastoupení se uvedené modely v jednotlivých ročnících vyskytovaly.

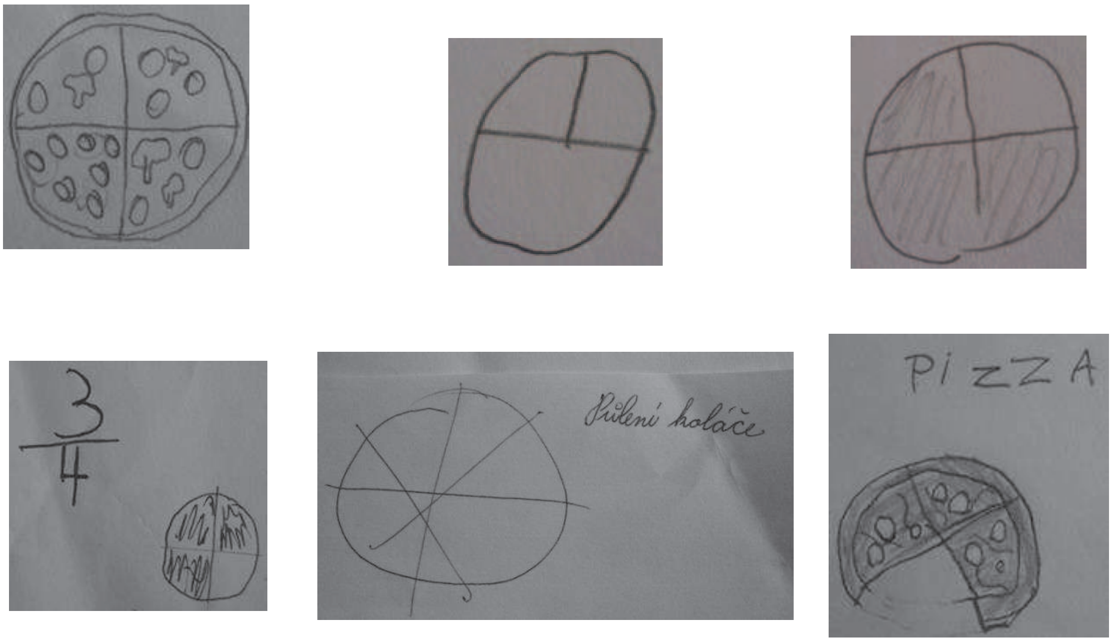
Tabulka 2.3: Předvýzkum – 2. otázka, třídění podle modelů

Třídění podle modelů	Kruh	Obdélník	Úsečka	Soubor předmětů	Ostatní
3. ročník	13	3	1	0	2
5. ročník	14	1	0	0	7
Celkem	27	4	1	0	9

Ilustrace odpovědí a komentáře k nim

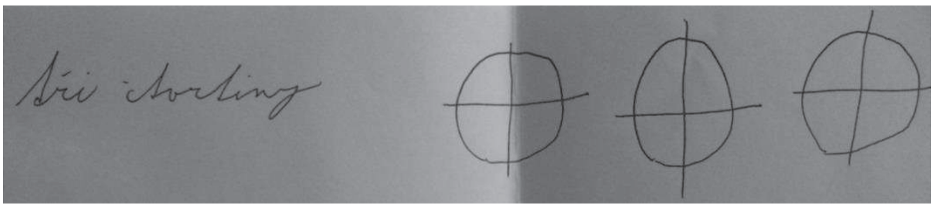
- **Kruh**

Tento typ modelu zde značně převažoval. Jak jsem již uvedla, do této skupiny jsem zaznamenala i ty odpovědi, které nebyly vyřešeny dobře. Proto je na obrázcích možné pozorovat rozdělení koláče na více či méně než čtyři části.



Obr. 2.10: Kruh

Vyskytlo se i takovéto znázornění.

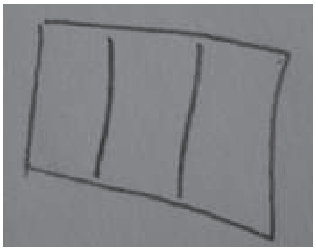


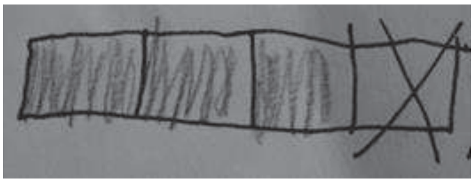
Obr. 2.11: Kruh (zlomek z více celků)

Vyskytly se i obrázky naznačující, že žák chápe slovo „čtvrtina“ jako synonymum pro „kus“, „díl“ a v modelech *kruh, obdélník, úsečka* vyznačil 3 (shodné) kusy. (Jeden žák ve výzkumu napsal: „$\frac{3}{4}$ *může být, že rozdělíme koláč na tři čtvrtiny“*.) Tuto domněnku je třeba ověřit.

- **Obdélník**

U modelu *obdélník* mě překvapilo, že byl zastoupen v tak malém množství a ve většině případů ho k znázornění $\frac{3}{4}$ využili žáci 3. ročníku. Předpokládala jsem, že tento model bude žáky zastoupen ve větším počtu. Zvláště je-li to model, se kterým mají žáci zkušenosti z reálného života. Případně předpokládám, že zvláště v učebnicích matematiky pro 5. ročník základní školy, se vyskytují slovní úlohy či úkoly, které jsou reálnými situacemi podloženy – dělení čokolády, pole, atd.





Obr. 2.12: Obdélník

- **Úsečka**

Model *úsečka* se vyskytl pouze v jednom případě a to ve 3. ročníku. Jak je z obrázku patrné, žák při znázornění použil pravítko a měřil. I během dělení úsečky si dal jako jeden z mála záležet, aby jednotlivé části byly shodné.

Obr. 2.13: Úsečka

2.1.5 Závěr předvýzkumu

Z předvýzkumu vyplynulo:

Během hodnocení těchto otázek jsem vycházela z očekávaných výpovědí, které jsem předpokládala (str. 41).

1. otázka - ***Napiš nebo nakresli, co si představíš, když řeknu slovo zlomek.***

- *Většina žáků 3. ročníku si slovo zlomek nespojí s učivem o zlomcích, jelikož slovo zlomek se do 3. ročníku nevyskytuje. Žáci nebudou tímto směrem nikterak ovlivněni.*

Ve 3. ročníku se tento předpoklad potvrdil. Z odpovědí je možné pozorovat, že ve 3. ročníku nejsou představy žáků výrazně rozdílné. Většina žáků spojuje slovo zlomek s výrazem zlomený. Jen malá část žáků si již uvědomuje spojení se slovním vyjádřením, které zajisté znají z mimoškolního prostředí a spojením s vyučovacím předmětem matematika.

- *Většina žáků 5. ročníku si slovo zlomek propojí s učivem o zlomcích, kdy žáci své odpovědi znázorní pomocí obrázků rozdělených na části.*

V tomto případě se můj předpoklad potvrdil pouze částečně. V 5. ročníku se znalosti žáků značně liší. Jedna část žáků si slovo zlomek spojuje, stejně jako ve třetím ročníku, s výrazem zlomený. Toto propojení mě dosti překvapilo, jelikož v této třídě jsem během praxe strávila několik hodin matematiky a předpokládala jsem, že slovo zlomek je pro ně již známý pojem, zvláště když náplní těchto hodin bylo počítání se zlomky, dokonce sami žáci slovo zlomek používali. Jelikož jsem otázku pokládala v hodině matematiky, očekávala jsem, že toto propojení pro ně bude samozřejmé a žáci jako odpověď využijí obrázků rozdělených na části. Druhá část žáků podle mého názoru již má vybudovanou představu pod slovem zlomek, jelikož si představují reálné situace jako krájení koláče, slovní vyjádření části z celku a nejvíce zastoupenou odpověď v podobě symbolů, se kterými v hodině pracují. Nyní, když se rozmýšlím nad svou případnou reakcí, nejspíše bych také odpověděla pomocí symbolu a nikoli obrázku, jak jsem předpokládala před zadáním tohoto předvýzkumu.

2. otázka - *Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli $\frac{3}{4}$.*

- *Předpokládám, že část žáků 3. ročníku si $\frac{3}{4}$ propojí s reálnými situacemi (například $\frac{3}{4}$ hodiny). Během zadání otázky sice napíši na tabuli symbolický zápis zlomku ($\frac{3}{4}$), se kterým se doposud nesetkali, ale současně vyslovím „tři čtvrtiny“, žáci své odpovědi zaznamenají především obrázky.*

V tomto případě se mé předpoklady potvrdily. Ze začátku jsem měla obavu, jak na mou otázku budou žáci 3. ročníku reagovat, zvláště když na tabuli napíšu $\frac{3}{4}$, tedy symbolický zápis zlomku, se kterým se zatím nesetkali. Jakmile jsem během zadání otázky na tabuli zapsala $\frac{3}{4}$, bylo na některých z nich vidět zmatení. Přesto se našli tací, kterým tato informace stačila, a pustili se do práce. Těchto žáků bylo velmi málo. Jakmile jsem však symbolický zápis zlomku doplnila slovně „tři čtvrtiny“, bylo vidět jejich uklidnění a do práce se pustila i zbylá část třídy. Z toho pozorování jsem si potvrdila, že žáci se zlomky v podobně slovního vyjádření mají mnohé zkušenosti oproti symbolickému zápisu zlomku. Osobně jsem očekávala větší propojení $\frac{3}{4}$ s hodinami, jelikož si myslím, že v této podobě se se slovy tři čtvrtě setkáváme nejčastěji. Až později jsem si uvědomila, že v mém zadání zaznělo „tři čtvrtiny“ a nikoli „tři čtvrtě“, což mohlo žákům propojení překazit.

- *Předpokládám, že žákům 5. ročníku nebude činit potíže vybrat si z modelů zlomků, které by měli mít zabudovány ve svých představách, a pro znázornění $\frac{3}{4}$ zvolí především obrázek, podle jejich názoru nejvhodnější, na kterém $\frac{3}{4}$ vyznačí.*

Zde se mé předpoklady potvrdily. Většina žáků ve svých odpovědích zvolila pro své znázornění obrázek, na kterém vyznačila určitou část. Zajímavá pro mě byla situace v 5. ročníku, kdy po zapsání $\frac{3}{4}$ na tabuli jeden z žáků v první lavici pronesl větu ke svému spolužákovi: *„Tak to bude asi ten zlomek.“* Oba poté do své odpovědi zapsali slovo zlomek. Při vybírání odpovědí jsem se na jejich listy s odpověďmi soustředila, jelikož mě zajímalo, jaká byla jejich odpověď na předchozí otázku. Oba žáci na předchozí otázku odpověděli obrázkem, na kterém bylo znázorněné zlomení. V tomto případě předpokládám, že tito žáci mají minimální představy o zlomcích a jejich odpověď na druhou otázku byla pouze dedukcí.

V této otázce byly rozdíly mezi jednotlivými třídami minimální. Většina žáků si pro vyznačení $\frac{3}{4}$ zvolila znázornění obrázkem.

Shrnutí

Mým hlavním cílem tohoto předvýzkumu bylo zjistit, jakou představu o zlomcích mají žáci ještě předtím, než se učivo o zlomcích probírá ve škole, tedy žáci 3. ročníku a žáci 5. ročníku, kteří již učivo o zlomcích mají podle RVP zařazené do učiva.

Vzhledem k poznatkům, které jsou zpracovány v teoretické části, jsem očekávala, že rozdíly mezi znalostmi žáků budou mnohem větší. Předpokládala jsem, že výsledek významně ovlivní fakt, že žáci pracují v hodinách s učebnicemi nakladatelství Fraus (přístupy profesora Hejného), kde se propedeutika zlomků objevuje od 1. ročníku. Až později jsem se od paní učitelky dověděla, že žáci 3. ročníku s těmito učebnicemi pracují prvním rokem, tudíž je koncepce matematiky profesora Hejného nemohla ovlivnit. Záleží na učiteli, jak chápe význam uchopování vztahu celek – část.

Rozdíly ve znalostech problematiky zlomků vidím větší mezi žáky v jednotlivých třídách než mezi ročníky. Zde je otázkou, s jakými znalostmi již žáci do školy nastoupili. Byly tyto znalosti zjišťovány a poté sjednoceny? Jelikož v těchto třídách jsem během praxe trávila šest vyučovacích hodin matematiky za celý školní rok, tak není v mých silách na ně odpovědět. Našly se však další otázky, na které by se mi mohlo podařit nalézt odpovědi.

Během třídění všech odpovědí mě překvapilo, že pro znázornění části celku téměř všichni žáci upřednostňovali jeden druh modelu a to model *kruh*. Ostatní modely se vyskytovaly pouze zřídka. Dávají tedy žáci přednost modelu *kruh* před ostatními? Pro tyto závěry nepovažuji výzkumný vzorek za dostačující. Proto jsem se rozhodla této otázce věnovat v 1. části výzkumu. Závažné je zjištění, že slovo „čtvrtina“ chápou jakou novou jednotku.

2.2 Výzkum – 1. část

V této části výzkumu jsem vycházela z předvýzkumu. Chtěla jsem potvrdit či vyvrátit zjištění, že žáci upřednostňují pro znázornění části celku kruhový model.

Cílem výzkumné části bylo:

- potvrdit či vyvrátit, zda žáci dávají přednost kruhovému modelu.

K potvrzení či vyvrácení předchozího předvýzkumu by stačilo položit pouze druhou otázku: *Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli* $\frac{3}{4}$. Za důležité však považuji, aby žáci prošli stejnými myšlenkovými pochody jako v předvýzkumu. Proto jsem i zde položila obě otázky:

1. **Napiš nebo nakresli, co si představíš, když se řeknu slovo ZLOMEK.**
2. **Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli $\frac{3}{4}$.**

Tohoto výzkumu se zúčastnilo celkem 148 žáků Základní školy Kunratice v Praze. Aby byl vzorek opravdu široký a prostupoval 1. stupněm základní školy, rozhodla jsem se ho, uskutečnit ve 3., 4. a 5. ročníku základní školy. Ve 3. a 4. ročníku jsem měla možnost otázky položit ve všech třech paralelních třídách. V 5. ročníku bohužel jen v jedné z paralelních tříd. Ve všech těchto třídách žáci pracují s učebnicemi Fraus (přístupy profesora Hejného) od 1. ročníku.

Otázky jsem pokládala v různých vyučovacích hodinách a to v hodině českého jazyka, člověk a jeho svět (prvouka) a v jednom případě i v hodině výtvarné výchovy. Zadání v hodině matematiky probíhalo pouze v jednom případě a to ve třídě 4. C.

2.2.1 Průběh výzkumu

Zadání probíhalo stejným způsobem jako v předchozím předvýzkumu. Po vysvětlení, co od žáků očekávám, jsem rozdala čisté listy, na které se žáci podepsali. Na první stranu zapsali číslo jedna, které dali do kroužku, což značilo první otázku. Poté jsem položila první otázku: „*Napiš nebo nakresli, co si představíš, když se řeknu slovo ZLOMEK.*“

V té chvíli jsem zpravidla viděla, že někteří žáci se na mě upřeně dívají. Proto jsem pro jistotu otázku znovu zopakovala, abych se ujistila, že mi všichni žáci rozuměli.

Žáky jsem zároveň požádala, aby po dopsání odpovědi otočili papír a odložili pero, abych poznala, kdo má již hotovo. Jakmile jsem viděla, že žáci dokončili práci, zapsali si na druhou stranu číslo dvě, které dali do kroužku, to značilo druhou otázku. Poté jsem položila druhou otázku: *„Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli tři čtvrtiny.“* Současně jsem tři čtvrtiny zapsala symbolickým zápisem „$\frac{3}{4}$“ na tabuli. I v tomto případě jsem otázku jednou zopakovala. Když jsem viděla, že většina žáků práci dokončila, začala jsem práce postupně vybírat.

Ani během tohoto výzkumu jsem zadávání a průběh výzkumu neprodlužovala. V jednotlivých třídách jsem se zdržela přibližně 10 – 15 minut.

2.2.2 Očekávané výpovědi

Na základě předvýzkumu a množství respondentů předpokládám tyto výpovědi:

- Žáci pro znázornění $\frac{3}{4}$ budou upřednostňovat model *kruh*.
- V souboru všech odpovědí budou zastoupeny i ostatní modely, kterými lze $\frac{3}{4}$ znázornit, avšak v menší míře.

2.2.3 Zjištěné výsledky, třídění

Při hodnocení jsem se zaměřila především na druhou otázku: „*Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli $\frac{3}{4}$.*“, kde mě zajímalo, jaký model žáci použijí k znázornění $\frac{3}{4}$.

Přestože mým cílem bylo zjistit, jakým modelem žáci znázorní $\frac{3}{4}$, rozhodla jsem se i zde práce roztřídit **podle charakteristik**, jelikož v charakteristikách se vyskytl nový jev, který by podle mého neměl být opomenut. Poté jsem třídila **podle modelů**, kde se mělo potvrdit či vyvrátit mé zjištění, že žáci upřednostňují pro znázornění části celku model *kruh*.

<u>Třídění podle charakteristik</u>

Do výčtu jevů jsem zahrnula charakteristiku činností z obou částí předvýzkumu, kde se vyskytly obdobné jevy:

- **spojení s vyučovacím předmětem matematika;**
- **spojení s ciferníkem hodin;**
- **spojení s pojmem zlomek;**
- **znázornění obrázkem (schéma);**
- **ostatní**.

Vyskytl se zde i nový jev:

- **spojení s hudební výchovou**.

Pro jasnější představu o jednotlivých kritériích jsou níže uvedeny jejich ilustrace obrázkem a podrobnějším popisem.

I zde jsem během třídění narazila na práce, kde byla určitá odpověď ve více podobách a práce bylo možné zařadit podle více kritérií. Tyto práce jsem proto zařadila do více jak jedné skupiny. Z tohoto důvodu je počet odpovědí větší, než počet respondentů. I zde se vyskytovaly práce, které nespadaly do žádného z mnou stanovených kritérií. Tyto odpovědi jsem zařadila do skupiny ostatní, například odpovědi typu: nevím, nic mě nenapadá, hodně divný.

Pro přehlednost jsem odpovědi žáků utřídila do tabulky 2.4. Je v ní možné pozorovat přesné počty odpovědí v jednotlivých ročnících.

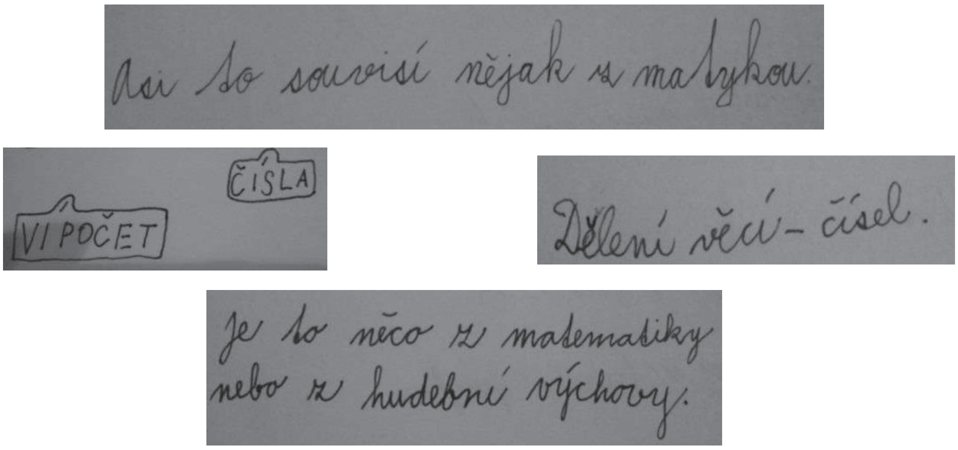
Tabulka 2.4: Výzkum 1. část – třídění podle charakteristik

Třídění podle charakterist ik	Spojení s vyučovacím předmětem	Spojení s ciferníkem hodin	Spojení s pojmem zlomek	Znázornění obrázkem	Spojení s hudební výchovou	Ostatní
3. A	5	2	6	7	2	2
3. B	4	1	2	8	3	5
3. C	5	2	0	8	1	3
4. A	2	1	12	10	0	3
4. B	4	2	1	18	1	1
4. C	2	0	4	11	0	2
5. ročník	7	0	8	7	0	2
Celkem	**29**	**8**	**33**	**69**	**7**	**18**

<u>Ilustrace odpovědí a komentáře k nim</u>

- **Spojení s vyučovacím předmětem matematika**

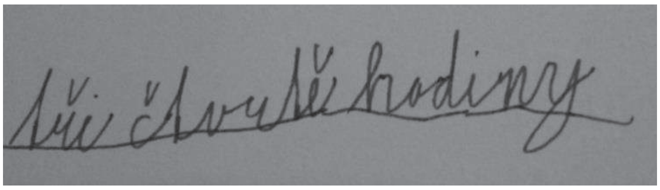
Stejně jako v předvýzkumu, tak i zde žáci $\frac{3}{4}$ spojovali slovo zlomek s vyučovacím předmětem matematika. Tento typ odpovědi se vyskytoval napříč všemi ročníky.



Obr. 2.14: Spojení s vyučovacím předmětem

- **Spojení s ciferníkem hodin**

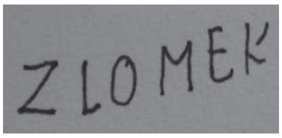
Spojení $\frac{3}{4}$ s hodinami se i v tomto výzkumu vyskytovalo velice málo. Čekala jsem, že v takovémto počtu respondentů se tento typ odpovědi bude vyskytovat mnohem více. Jak je ale z přehledu jednotlivých ročníků patrné, tak spojení s hodinami se vyskytovalo zejména v nižších ročnících, kde žáci nejsou tolik ovlivněni znalostmi z hodin matematiky, ale vychází ze svých vlastních zkušeností, případně z vyučovacího předmětu svět kolem nás (prvouka).

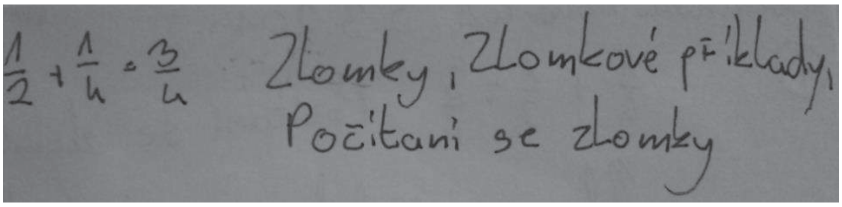


Obr. 2.15: Spojení s ciferníkem hodin

- **Spojení s pojmem zlomek**

Překvapilo mě, kolik žáků v tomto výzkumu použilo jako odpověď spojení $\frac{3}{4}$ s pojmem zlomek. V předešlém předvýzkumu jsem si výskyt této odpovědi spojovala s předvídavostí žáků. Nyní se zamýšlím, zda to není spojeno s tím, jak je učivo o zlomcích probíráno. Pojem zlomek by se neměl vyskytovat dříve, než si sami žáci vyvodí symbolický zápis zlomku (4. – 5. ročník). Do té doby žáci pracují se zlomkem v podobě slovního vyjádření, s pojmem zlomek je však neseznamujeme.

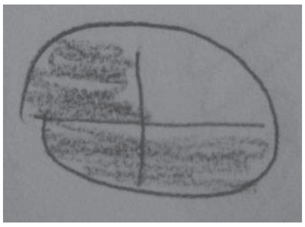


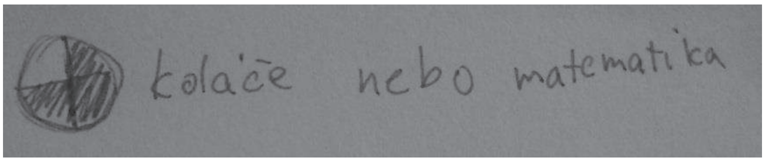


Obr. 2.16: Spojení s pojmem zlomek

- **Znázornění obrázkem (schéma)**

Jak jsem předpokládala, tak i zde se většina žáků pro znázornění $\frac{3}{4}$ rozhodla použít znázornění obrázkem. Tento způsob zaznamenání považuji za odpovídající jejich znalostem. Jak jsem uvedla výše, při seznamování se s učivem o zlomcích je velice důležitá činnostní reprezentace, kdy žáci poznávají části z celku pomocí manipulace (překládání, stříhání, krájení, atd.). Poté přichází ikonická reprezentace, kdy žáci své činnosti zaznamenávají pomocí obrázků. Jelikož při mém zadání žáci neměli možnost manipulace, považuji znázornění $\frac{3}{4}$ pomocí ikonických obrázků za adekvátní k znalostem, jaké by žáci o zlomcích měli mít.



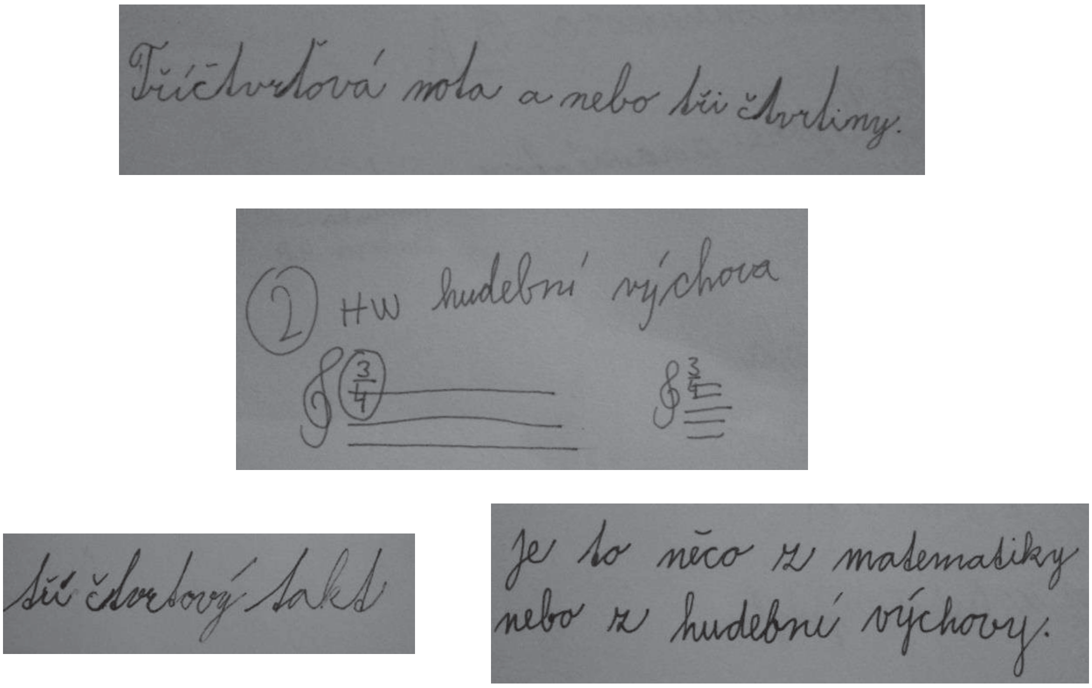


Obr. 2.17: Znázornění obrázkem(schéma)

- **Spojení s hudební výchovou**

Jako nové spojení se v tomto výzkumu objevilo spojení $\frac{3}{4}$ s hudební výchovou a to především ve 3. ročnících. Pokoušela jsem se od učitelů zjistit, jakému učivu se žáci právě věnují v hodinách hudební výchovy (zda právě neprobírají či v minulých hodinách neprobírali délku not). Po rozhovoru s jednou paní učitelkou jsem zjistila, že ve všech 3. ročnících vyučuje hudební výchovu jeden učitel. S tímto učitelem jsem bohužel neměla možnost hovořit. Od ostatních učitelů jsem však slyšela, že specializací tohoto učitele na 1. stupni základní školy je právě hudební výchova.

Překvapilo mě, že v předvýzkumu se tento typ odpovědi nevyskytl a byl zde zastoupen tak malým počtem. Vždyť délka not (učivo o kvalitě tónů) je zařazeno v očekávaných výstupech do 1. období (1. – 3. ročník).[4] Což znamená, že všichni žáci si jím již měli projít.



Obr. 2.18: Spojení s hudební výchovou

Třídění podle modelů

Pro potvrzení či vyvrácení mého zjištění z předvýzkumu bylo stěžejní třídění **podle modelů**, které žáci používali ke znázornění $\frac{3}{4}$. Jako kritérium jsem si stejně jako v předvýzkumu stanovila všechny modely, kterými je možné zlomky znázornit: **kruh, obdélník, úsečka, soubor předmětů a ostatní**. Do skupiny ostatní jsem zařadila ty odpovědi, které nereprezentovaly žádné z mnou stanovených kritérií. Jak je z tabulky 2.5 patrné, v kolonce ostatní je téměř polovina z celkového počtu odpovědí. To je zapříčiněno tím, že žáci zvolili jiný způsob odpovědi, než bylo zvolené kritérium. Tyto odpovědi bylo možné vidět v předešlém třídění podle charakteristik – spojení s pojmem zlomek, spojení s vyučovacím předmětem matematika, atd. Někteří žáci pro znázornění $\frac{3}{4}$ zvolili více než jeden z modelů. V tomto případě jsem započítala každý model zvlášť. Z tohoto důvodu je počet odpovědí větší, než počet respondentů.

Při vyhodnocování výsledků jsem brala v úvahu nejen znázornění obrázkem, ale i slovní vyjádření popisující určitý model, například pojmy pizza, koláč. Mezi dané modely jsem zařadila i ty, které nejsou dobře vyřešené (to znamená takové modely, které jsou rozděleny na více částí, než jaké udává zadání, případně není správně vyznačen určený počet částí, tj. $\frac{3}{4}$), ale jejich základem je daný model.

Pro jasnější představu o jednotlivých kritériích jsou níže uvedeny jejich ilustrace obrázkem a podrobnějším popisem.

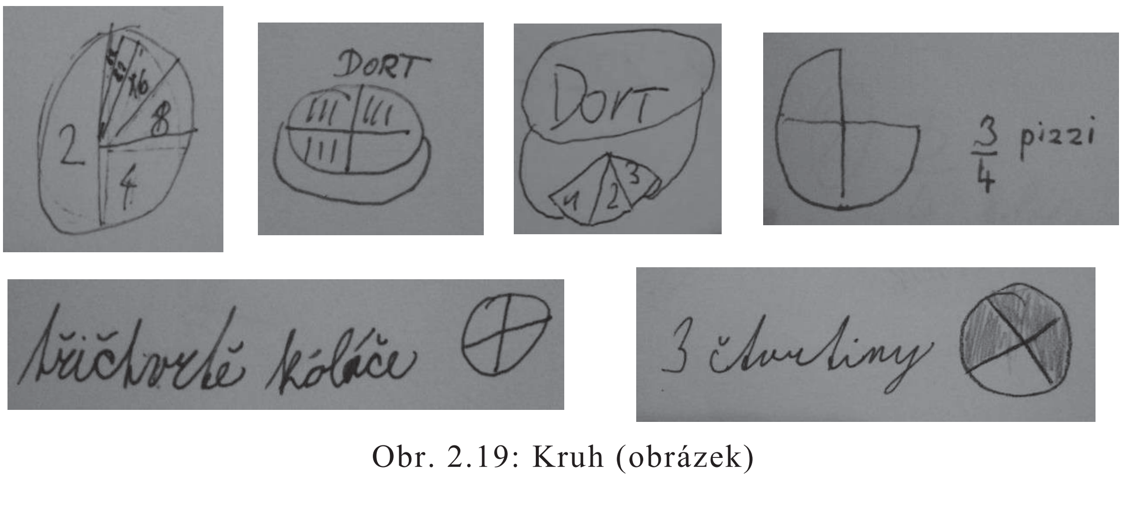
Tabulka 2.5: Výzkum 1. část – třídění podle modelů

Třídění podle charakteristik	Kruh	Obdélník	Úsečka	Soubor předmětů	Ostatní
3. A	9	1	0	0	15
3. B	10	0	0	0	11
3. C	9	0	0	0	9
4. A	11	1	0	0	13
4. B	17	2	0	0	5
4. C	9	1	0	1	6
5. ročník	7	0	0	0	14
Celkem	**71**	**5**	**0**	**1**	**73**

Ilustrace odpovědí a komentáře k nim

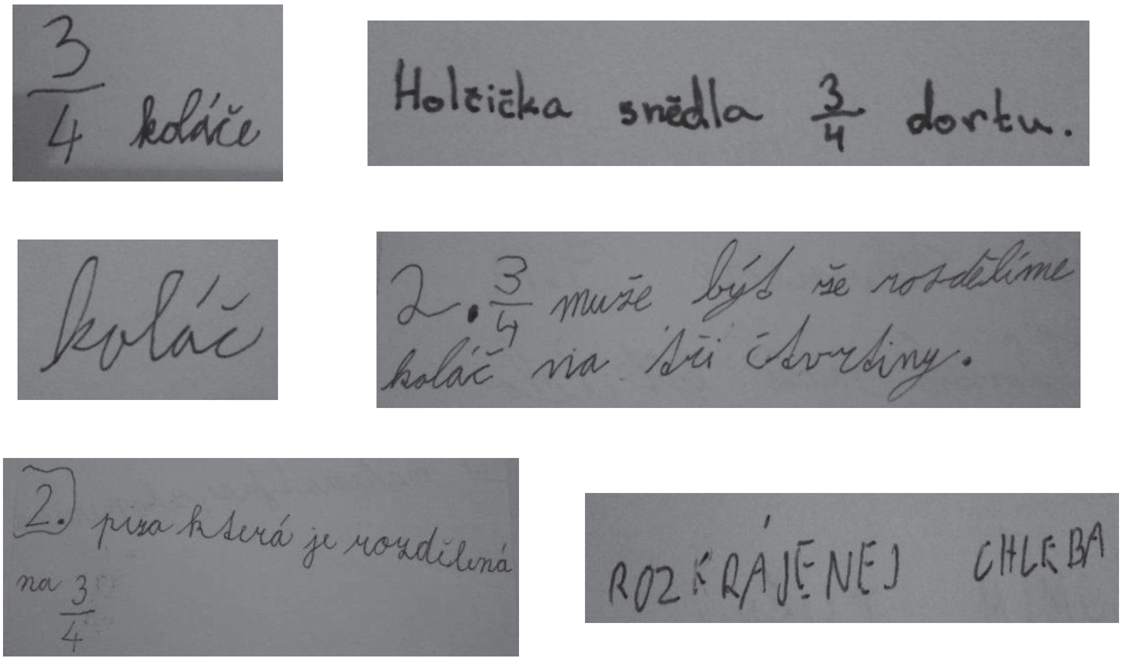
- **Kruh**

Model *kruh* byl zde hojně zastoupen a to 71krát z celkového počtu dotazovaných. Jak je z obrázků patrné, tak tento model je často spojován s předměty, ze kterých daný model vychází, a které žáci znají z vlastních zkušeností, například pizza, koláč, chléb.



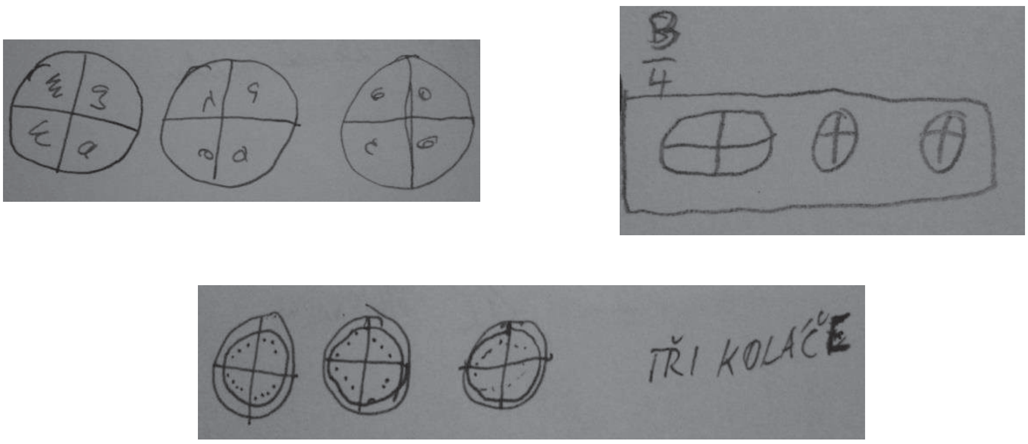
Obr. 2.19: Kruh (obrázek)

Jak jsem již uvedla, mezi modely jsem zařadila i ty odpovědi, které nejsou znázorněny obrázkem. Zařadila jsem je sem proto, že i když nejsou znázorněny obrázkem, je zde zřejmé spojení s modelem *kruh*. Pod slovy koláč, dort, pizza, chleba si dokážeme představit, jaké myšlenky se žákům „honily“ hlavou, s jakým modelem ve svých představách pracovali.



Obr. 2.20: Kruh (slovní vyjádření)

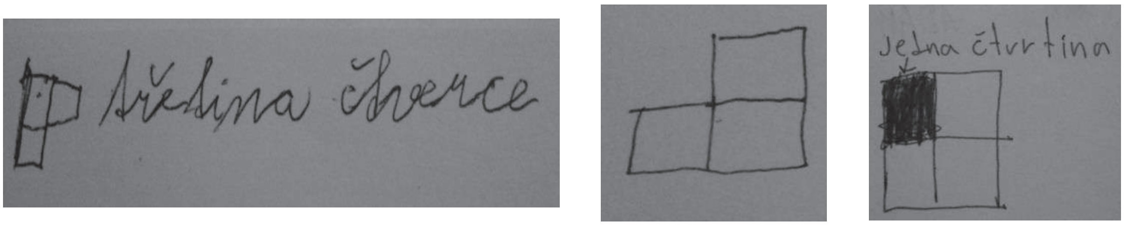
Podobně jako v předvýzkumu se vyskytlo toto znázornění.



Obr. 2.21: Kruh

- **Obdélník**

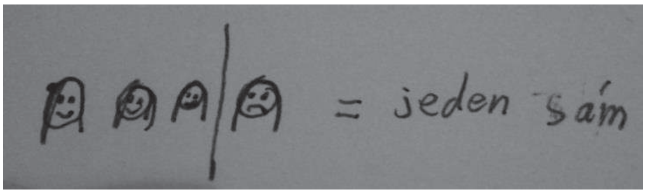
Ve srovnání s výskytem modelu *kruh*, byl model *obdélník* pro znázornění $\frac{3}{4}$ využit jen velice zřídka. V takovém množství respondentů jsem tak malý počet znázornění pomocí modelu *obdélník* rozhodně neočekávala.



Obr. 2.22: Obdélník

- **Soubor předmětů**

Ke znázornění $\frac{3}{4}$ pomocí modelu *soubor předmětů* se rozhodl jeden jediný žák z celkového počtu 148 respondentů.



Obr. 2.23: Soubor předmětů

2.2.4 Závěr 1. části výzkumu

Podle mého očekávání se potvrdilo mé prvotní zjištění a očekávané výpovědi, které jsem předpokládala (str. 56):

- *Žáci pro znázornění* $\frac{3}{4}$ *budou upřednostňovat model kruh.*
- *V souboru všech odpovědí budou zastoupeny i ostatní modely, kterými lze* $\frac{3}{4}$ *znázornit, avšak v menší míře.*

Proč si pro znázornění $\frac{3}{4}$ téměř všichni žáci, kteří k ilustraci využili modely zlomků, zvolili právě model *kruh*? Dlouho jsem nad těmito výsledky přemýšlela a snažila jsem se přijít na to, proč zrovna model *kruh* je pro žáky tak atraktivní. Jak je z žákovských odpovědí patrné, tak dělení celku na části s využitím modelu *kruh* je pro ně známější, například v podobě již zmíněné pizzy, koláče. Domnívám se proto, že tento model je pro žáky „dostupnější" a přijdou s ním do kontaktu častěji, než s ostatními modely. Ale s ostatními modely (*obdélník, úsečka, soubor předmětů*) se také museli setkat. Pokud je tomu tak, žákům by měly být ve škole ostatní modely vyváženě předkládány.

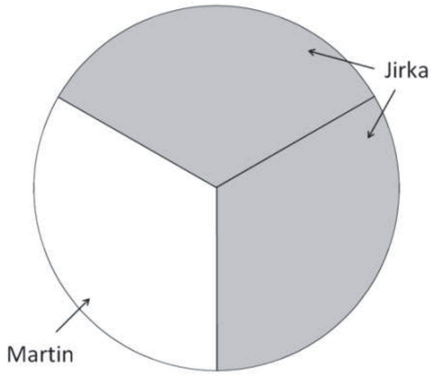
Dalším důvodem může být i to, že sami učitelé mohou nevědomky tíhnout k modelu *kruh* a tím opomíjejí či minimálně používají pro znázornění části celku i zlomku jiné modely. Oporou by jim však měly být učebnice matematiky, ve kterých by se měly průběžně objevovat všechny modely. Vzhledem k tomu, že žáci, se kterými jsem pracovala, se učí od prvního ročníku podle učebnic nakladatelství Fraus (přístupy profesora Hejného), kde se s propedeutikou zlomků pracuje již od prvních ročníků a jsou zde předkládány všechny výše zmíněné modely, učitelé by s nabídkou jiných modelů než *kruh* neměli mít potíže. Důvodem může být i to, že s modelem *kruh* se v reálném světě žáci setkávají častěji (pizza, dort, …), než s ostatními modely.

Během celého tohoto výzkumu mě napadaly tyto otázky:

Jestliže žáci pro znázornění $\frac{3}{4}$ volili převážně model *kruh*, jsou tedy dostatečně seznámeni i s jinými modely? Dokáží vyznačit $\frac{3}{4}$ i na jiném modelu než *kruh*?

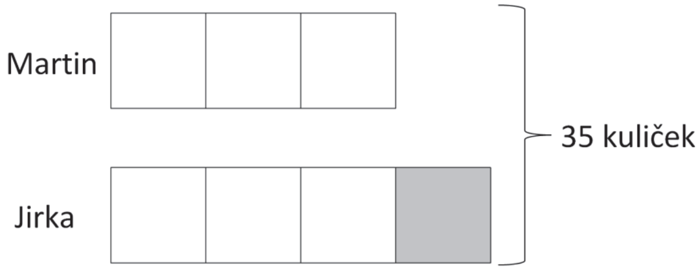
Je spousta úloh, při jejichž řešení se více hodí jiný model než *kruh*, který může být zavádějící. Vrátím se k úloze ze strany 8: *Jirka a Martin mají dohromady 35 kuliček. Jirka má o* $\frac{1}{3}$ *kuliček více než Martin. Kolik kuliček má Martin?*

Při výpočtu jsem postupovala stejně jako většina ostatních řešitelů: Jirka má $\frac{2}{3}\ z\ 35$ kuliček. Martin má $\frac{1}{3}\ z\ 35$ kuliček. Tento výpočet jsem podložila znázorněním na obrázku 2.24, který mě udržoval v představě, že celek je rozdělen na třetiny. (Třetina pro mě byla „jednotka".)



Obr. 2.24: Znázornění chybného řešení úlohy

Až s odstupem času jsem si uvědomila, že model *kruh* mě zaváděl k chybnému řešení. Teprve po pozorném čtení slovní úlohy a využití modelu obdélník jsem si dokázala představit a znázornit správné řešení, které je možné pozorovat na obrázku 2.25. Zde je možné vidět, že Jirka má o $\frac{1}{3}$ více „než“ Martin.



Obr. 2.25: Znázornění správného řešení úlohy

Nesmíme však opomíjet, že důležité je správně určit celek.

2.3 Výzkum – 2. část

V této části výzkumu jsem vycházela z 1. části výzkumu, kde jsem si potvrdila, že žáci upřednostňují pro znázornění části celku kruhový model. Nyní jsem se tedy zaměřila na to, jestli žáci dokážou pracovat i s jinými modely a dokážou na nich znázornit stejnou část.

Cílem tohoto výzkumu bylo:

- zjistit, zda jsou žáci schopni znázornit část z celku na jiném modelu než modelu *kruh*, což odkazuje na předchozí část práce, tj. zda jsou žáci dostatečně seznámeni i s jiným modelem než *kruh* (*obdélník, soubor předmětů, úsečka*).
- zjistit, zda žáci dokážou na různých modelech znázornit určenou část z celku (daný zlomek).

K tomu, abych na tyto otázky mohla odpovědět, bylo potřeba připravit didaktický test (viz příloha 1), který jsem žákům posléze předložila. Při sestavování tohoto testu jsem si stanovila kritérium, které test musí splňovat, aby vedl k odpovědím na mé otázky: Žákům musí být předloženy všechny modely, o kterých jsem doposud mluvila (*kruh, obdélník, soubor předmětů, úsečka*). Na těchto modelech vyznačí určitou část.

Zpočátku jsem nevěděla, zda žákům dané modely předložit, donést do třídy konkrétní předměty (čtvrtka – *obdélník*, vystřiženou fotografii pizzy – *kruh*, kuličky – *soubor předmětů*, provázek – *úsečka*) s nimiž by žáci manipulovali. Zde by bylo možné pozorovat, jak žáci s těmito předměty manipulují a bylo by možné zaznamenat jejich „cesty úvah“, nebo jestli bude lépe vyhodnotitelné, když připravím pracovní list, kde budou potřebné modely zakresleny a na nich zadanou část vyznačí.

Nakonec jsem se rozhodla pro písemné zpracování. Tuto podobu vzhledem k předchozím částem výzkumu považuji za nejvhodnější a srovnatelnou s předchozím šetřením, které jsem již prováděla. A to především proto, že i v jejich průběhu, žáci neměli možnost manipulace. Pracovali pouze s ikonickými reprezentacemi (pokud si zvolili zaznamenání obrázkem), nikoli činnostními. Myslím si, že činnostní reprezentace by pro žáky mohly být návodné a poté by zkreslily výsledky výzkumu. Nakreslila jsem proto na papír všechny modely, na kterých by žáci měli zakreslit nebo vyznačit část celku danou zlomkem.

Druhým krokem bylo zvolit, jakou část celku mají žáci na uvedených modelech vyznačit. Jelikož jsem po celou dobu pracovala se zlomkem $\frac{3}{4}$, rozhodla jsem ho zanechat i v tomto výzkumu.

Úkolem žáků tedy bylo:

Na uvedených obrázcích vyznač (vybarvi) tři čtvrtiny ($\frac{3}{4}$).

V zadání uvádím slovní vyjádření zlomku, protože v 1. části výzkumu jsem žákům zadala: *„Napiš nebo nakresli, co si představíš, když napíšu na tabuli tři čtvrtiny.“* a současně jsem na tabuli zapsala symbolický zápis zlomku $\frac{3}{4}$. Tudíž žákům byl vztah celku a části zapsaný pomocí zlomku předložen v podobě slovního vyjádření i symbolického zápisu. V této části výzkumu test pouze předložím a zadání si budou žáci číst sami, mohlo by tedy u některých respondentů dojít k nepřesnému přečtení zadání, proto v tomto případě považuji za důležité uvést, jak slovní vyjádření zlomku, tak i jeho symbolický zápis.

Tato část výzkumu probíhala na Základní škole Brána jazyků s rozšířenou výukou matematiky, která vznikla sloučením dvou původně samostatných škol (ZŠ Brána jazyků a ZŠ Uhelný trh). A to ve 3. a 4. ročníku. Ve 3. ročníku bylo přítomno 22 žáků a ve 4. ročníku bylo přítomno 24 žáků. Obě třídy patřily původně k ZŠ Uhelný trh a matematika se v nich vyučuje podle učebnic Svět čísel a tvarů, nakladatelství Prometheus, jejímiž autory jsou A. Hošpesová, J. Divíšek, F. Kuřina.

2.3.1 Průběh výzkumu

Žáky jsem seznámila s tím, proč jsem k nim do třídy přišla a vysvětlila jsem jim, co se od nich očekává. Obdobně jako v předešlých částech výzkumu jsem žáky upozornila, že se nejedná o žádný test, za který by měli být hodnoceni. Jde mi především o znalosti, které mají.

Poté jsem rozdala pracovní listy a žáci se mohli pustit do práce. Žáci, kteří měli problémy s porozuměním zadání, se mohli přihlásit, abych jim osobně pomohla. Tuto možnost jsem nabídla, jelikož ve třídách se nacházeli cizinci a žáci se specifickými poruchami učení, především dyslexie (porucha čtení). Ve 3. ročníku se o pomoc přihlásili dva žáci, že nerozumí zadání. Zadání jsem jim přečetla a poté se pustili do práce.

Jakmile jsem viděla, že většina žáků dokončila svou práci, začala jsem dokončené práce vybírat. V obou třídách byli žáci velice ohleduplní. Jakmile dokončili svou práci, našli si jinou zábavu (četli knihu, kreslili, atd.), aby nerušili své spolužáky.

2.3.2 Očekávané výpovědi

Na základě poznatků z teoretické části práce očekávám tyto výsledky:

3. ročník:

- Přestože učivo o zlomcích je v očekávaných výstupech zařazeno až do 2. období základní školy (4. – 5. ročník), většina žáků bude na základě vlastních zkušeností schopna vyznačit část z celku na všech uvedených modelech. Ne všichni žáci však vyznačí $\frac{3}{4}$ správně, to znamená, že někteří žáci rozdělí celek pouze na tři části.

4. ročník:

- Jelikož tito žáci již mají zkušenosti s učivem o zlomcích, přepokládám, že téměř všichni správně graficky znázorní $\frac{3}{4}$ na všech uvedených modelech.

2.3.3 Zjištěné výsledky

3. ročník:

V 1. části výzkumu jsem pokládala otázky ústně. Než jsem stačila zopakovat zadání, abych se ujistila, že všichni žáci zadání porozuměli, většina z nich svou práci dokončila. Neměla jsem tedy možnost pozorovat průběh jejich práce.

Během 2. části výzkumu jsem pomocí upravené organizace práce na základě zkušeností z 1. části výzkumu, měla větší možnost procházet mezi žáky a zaměřit se na jejich práci v průběhu výzkumu. Především jsem měla možnost všímat si různých detailů. Jelikož třída je početná a žáci pracovali poměrně rychle, nebylo možné pozorovat všechny najednou. Nemohu proto tvrdit, že mnou uvedené údaje jsou naprosto přesné.

- Stejně tak, jak žáci uplatňovali model kruhu v předchozím výzkumu, uplatňovali ho i v tomto. Zaznamenala jsem, že až na 4 žáky, všichni zvolili jako výchozí model *kruh*. Jakmile měli označeny $\frac{3}{4}$ na modelu *kruh*, většinou pokračovali na modelu *obdélník*.

- Jako poslední model si žáci převážně nechávali model *úsečka* nebo *soubor předmětů*. Při pozorování jsem měla pocit, že práce v těchto modelech jim zabere nejvíce času.

- Během jejich práce jsem si všimla pěti žáků, kteří neporozuměli modelu *soubor předmětů* jako jednotnému obrázku a začali dělit na $\frac{3}{4}$ každý jednotlivý kroužek. V danou chvíli jsem se „neudržela" a doplnila jsem zadání*: „Obrázek, kde jsou kroužky, je jeden obrázek, není to každý kroužek zvlášť."* V té chvíli jsem si uvědomila, že jsem udělala chybu, jelikož i neporozumění modelu *soubor předmětů* jako jednomu obrázku je pro můj výzkum vypovídající. Přestože jsem to žákům prozradila, tak se našli tací, kteří rozdělili každý kroužek zvlášť.

- Mezi žáky byl jeden, který po celou dobu nepracoval. Zajímalo mě, proč nepracuje, zda je to z důvodu, že si neví rady či mu třeba není špatně. Zeptala jsem se ho proto, zda nemá nějaký problém nebo jestli nepotřebuje pomoc.

  Já: *„Potřebuješ s něčím pomoci nebo něčemu nerozumíš?"*

  On: *„Nevím, co to znamená."* a současně ukazoval do zadání na $\frac{3}{4}$.

  Já: *„ Zkus se zamyslet, jestli jsi to už někde viděl napsané nebo jestli jsi třeba někdy jindy slyšel slovo tři čtvrtiny."*

  On: *„Hm ..."*

Chvilku jsem u něho zůstala stát, zda se ještě na něco zeptá, ale otázku nepoložil. Odevzdal čistý list.

- Někteří žáci si na práci dali velice záležet a při rozdělování používali pravítko a části přesně vyměřovali. Zvláště u modelů *úsečka* a *obdélník*. V té chvíli jsem si uvědomila, že nad touto možností jsem nepřemýšlela, tudíž jsem ani nevolila rozměry, které by bylo možné přesně dělit. Možná to byl důvod k tomu, proč žáci strávili nejvíce času nad modelem *úsečka*.

- Při procházení mezi žáky jsem si všimla velice podobných řešení. Zvláště dva žáci měli naprosto shodné chybné řešení, kdy všechny modely dělili na tři části.

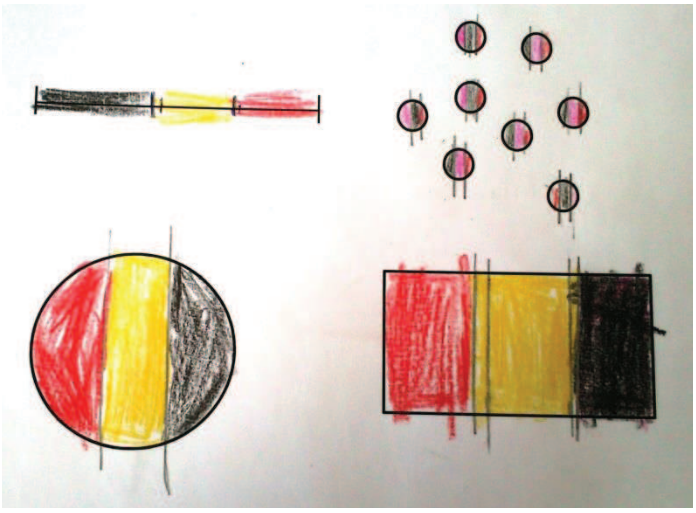
- Překvapilo mě, jak rychle někteří žáci pracovali, jelikož první práce byla hotová za 7 minut. Čekala jsem, že práce jim bude trvat o něco déle. Většinu prací jsem začala vybírat přibližně po 15 minutách. Nejdéle trvala práce 27 minut, kdy si dal žák velice záležet na tom, aby všechny části byly stejně velké a zdržel se přeměřováním jednotlivých částí.

Během procházení získaných prací jsem si všímala různých jevů. Uvádím velké množství postřehů. Mohou naznačovat, čeho si při vyučování všímat, na co dát pozor.

- Z celkového počtu 22 žáků bylo 7 bezchybných prací. Tito žáci na všech uvedených modelech správně vyznačili $\frac{3}{4}$.

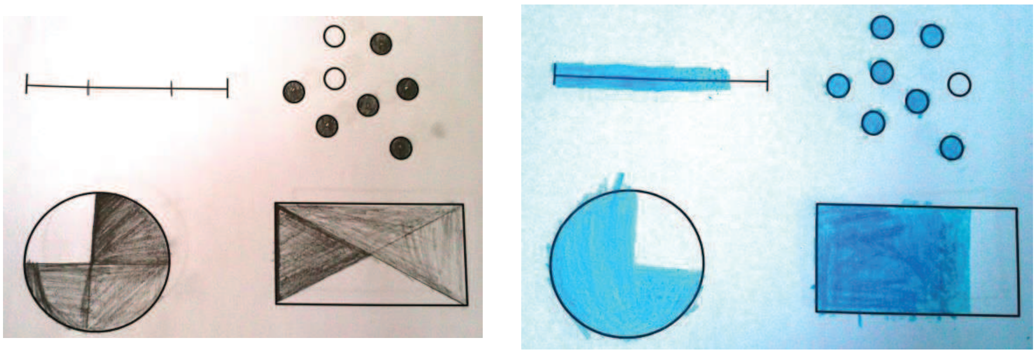
- Téměř všichni žáci, měli vyznačené rozdělení modelu *kruh* na 4 části, až na dva, kteří měli chybně vyznačené části u všech obrázků a jednoho, který odevzdal čistý pracovní list.

- Při vyznačování $\frac{3}{4}$ hraje číslo 3 pro žáky důležitou roli. Tito žáci $\frac{3}{4}$ vidí jako 3 díly, na které je třeba model *kruh, úsečka, obdélník* a *soubor předmětů* rozdělit, což je možné pozorovat na obrázku 2.26. Tento způsob převažoval u modelu *úsečka*. U všech modelů takto postupovali dva žáci, kteří rozdělili na 3 části všechny modely, včetně modelu *soubor předmětů*, kdy stejným způsobem rozdělili každý kroužek. I tady se ukázalo, že uvažují o třech dílech, částech. Že tři čtvrtiny chápou jako tří díly (viz str. 50)



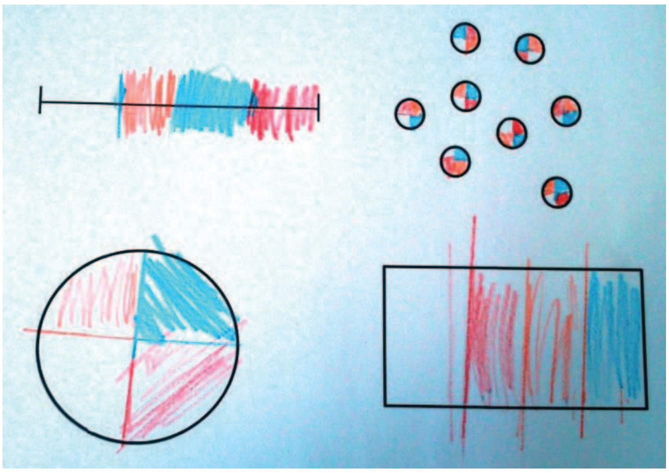
Obr. 2.26: Důležitost čísla 3

- Největší potíže žákům činily modely *úsečka* (rozdělují ji na tři díly) a *soubor předmětů* (zřejmě mu není jasný operátorový pohled $\frac{3}{4}$ z 8), kde chybovali nejčastěji. Překvapivě to byli i žáci, kteří alespoň na dvou modelech vyznačili $\frac{3}{4}$ správně. Tento postup je možné pozorovat na obrázku 2.27.



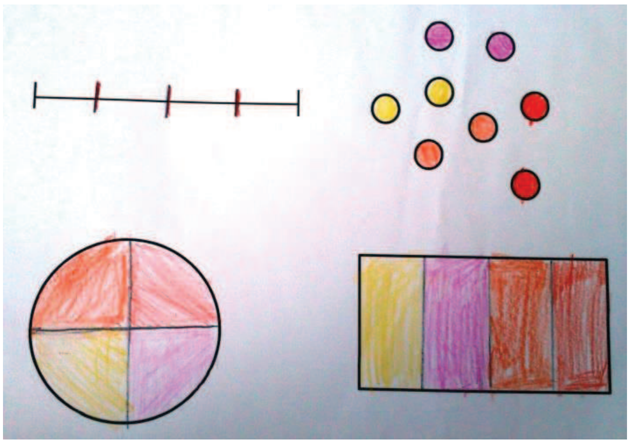
Obr. 2.27: Časté chybování

- I přes mé upozornění, že kroužky na obrázku jsou jeden obrázek, se našli tací, kteří v modelu *soubor předmětů* vyznačovali $\frac{3}{4}$ na každém kroužku zvlášť (obrázek 2.28). Zajímalo by mě, zda tito žáci zaslechli mé upozornění či byli do práce tak zabraní a neslyšeli ho. Je zde zřejmé, že v těchto případech si žáci neuvědomují, co je celek. Otázkou ale zůstává, kolikrát by se tato chyba vyskytla, kdybych na to žáky neupozornila.



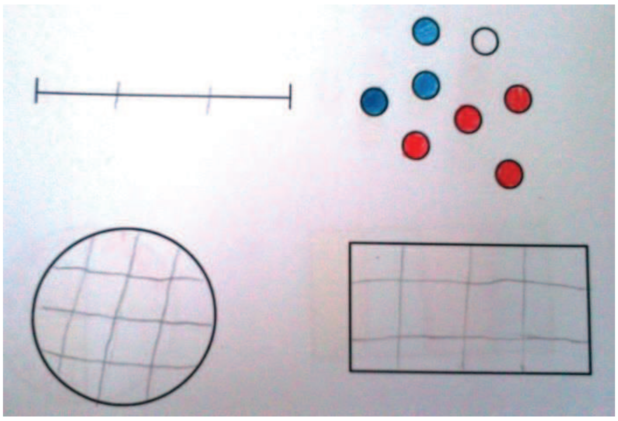
Obr. 2.28: Neuvědomění si celku

- Někteří žáci správně rozdělili celek na 4 části a poté všechny části vybarvili (obrázek 2.29). Jelikož zde použili různé barvy, tak nemohu říci, zda jde o neporozumění, či pojmu $\frac{3}{4}$ rozumí, ale pouze v zápalu vybarvování označili všechny části.



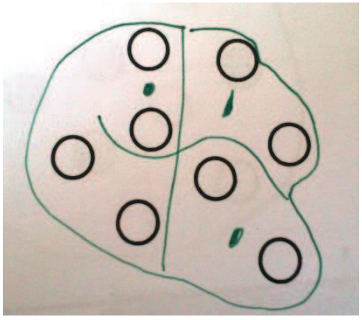
Obr. 2.29: Označení všech částí

- Jeden z žáků rozdělil model *kruh* i *obdélník* současně na 3 i 4 části. Je zde patrné, že žák si je vědom toho, že $\frac{3}{4}$ značí rozdělení celku na části, pouze si neuvědomuje, že se jedná o tři části ze čtyř. Jak je z obrázku 2.30 patrné, tak ani s ostatními modely se nevěděl rady. U modelu *soubor předmětů* vybarvil 3 kroužky modře a 4 kroužky červeně, tedy vyznačil 3 i 4 části. Pouze model *úsečka* rozdělil jen na 3 části. Řekla bych, že u tohoto modelu si nejspíše nevěděl rady, jak ho rozdělit na 3 a 4 části současně, jinak by to učinil i zde. Vynořuje se otázka, zda nejde o poměr.



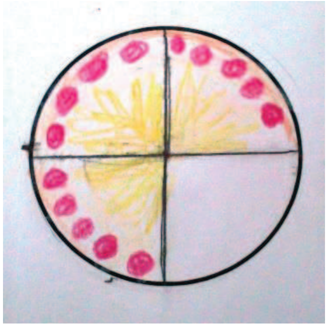
Obr. 2.30: Rozdělení celku na 3 a 4 části

- Ve dvou pracích mě překvapilo spojení modelu *soubor předmětů* do jednoho celku (dali do kruhu), který poté rozdělili na $\frac{3}{4}$. Tento postup je možné vidět na obrázku 2.31. Zajímalo by mě, zda toto zaznamenání bylo reakcí na mé upozornění, že kroužky jsou jeden obrázek, či oni sami měli potřebu si znázornit, co je v tomto případě celek.



Obr. 2.31: Spojení celku

- V jednom případě žák při rozdělování modelu *kruh* dokreslil do obrázku tečky. Na obrázku 2.32 je tedy možné vidět jakýsi „dort s třešněmi", kdy žák měl potřebu spojit si model *kruh* s konkrétní představou. Zajímavé je, že na dvou částech se nachází pět teček (třešní) a na jedné části pouze čtyři. Pravděpodobně se přepočítal.



Obr. 2.32: Spojení s konkrétní představou

4. ročník:

I v této třídě jsem měla možnost všímat si během práce žáků různých detailů:

- Zaměřila jsem se především na to, jakým modelem žáci začnou svou práci. Zde jsem si všimla, že model *kruh* zvolila přibližně polovina třídy. Ostatní brali modely postupně či volili různě.
- Žáci v této třídě minimálně dbali na přesnost, to znamená, že většina žáků k dělení na části nepoužívala pravítko, nepřeměřovali velikosti jednotlivých částí modelu *úsečka* a *obdélník*.
- V této třídě jsem se hlídala, abych neprozradila, že obrázek osmi kroužků je celek. Jeden žák se přihlásil s dotazem:

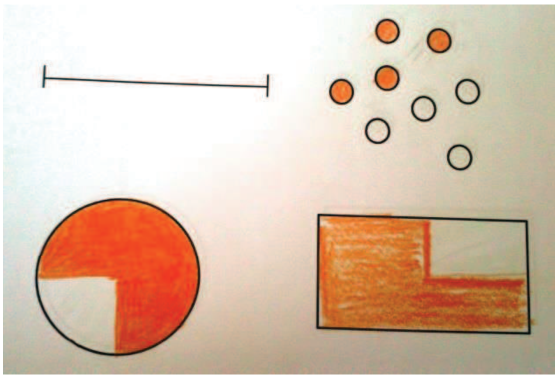
  On: *„S těmi kroužky, mám vybarvit v nich nebo z nich?“*

  Já: *„Nechám to na tobě a na tvém uvážení.“*

  Poté jsem se zaměřila na to, jak žák bude pracovat. Nakonec se rozhodl brát všechny kroužky jako jeden celek.
- Práce v této třídě probíhala velice rychle. První vyplněný pracovní list jsem zaznamenala již po 3 minutách. Poslední jsem vybírala po přibližně 15 minutách. V porovnání se 3. ročníkem je to odpovídající, jelikož žáci ve 4. ročníku se již tomuto tématu měli možnost věnovat v rámci hodin matematiky více a mají se zlomky více zkušeností. Zároveň je nezdržovalo zdlouhavé přeměřování jednotlivých částí modelů.

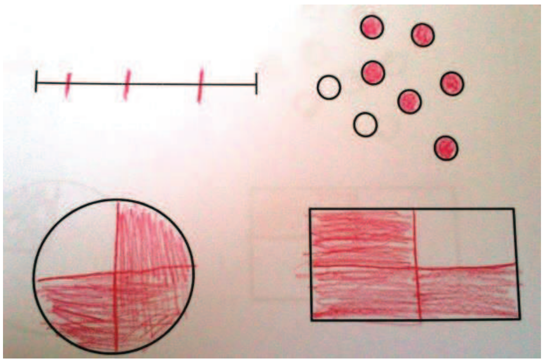
Ze získaných prací v této třídě je možné pozorovat podobné znaky jako ve 3. ročníku:

- Z celkového počtu 24 prací bylo dobře vyřešeno 13.
- Všichni žáci správně vyznačili $\frac{3}{4}$ na modelu *kruh*.
- Pouze jeden žák chybně vyznačil $\frac{3}{4}$ na modelu *obdélník*.
- Mezi nejproblémovější modely i v této třídě patřily modely *úsečka* a *soubor předmětů*. Žáci v nich chybovali nejčastěji, tyto chyby je možné pozorovat na obrázku 2.33. Jelikož s vyznačením $\frac{3}{4}$ na modelech *kruh* a *obdélník* tito žáci neměli potíže, je jasné, že rozdělování celku na části rozumí. Je možné, že s modely *úsečka* a *soubor předmětů* se nesetkávají tak často či s nimi v hodinách matematiky pracují minimálně. Chyby se opakují.



Obr. 2.33: Časté chybování

- I zde se našli tací, kteří dobře rozdělili celek, v tomto případě model *úsečka*, na 4 části a poté nevyznačili zadané 3 části (obrázek 2.34). Jelikož ostatní rozdělení je zde znázorněno správně, přepokládám, že jde pouze o opomenutí a žák si je vědom, jaká část znázorňuje $\frac{3}{4}$.



Obr. 2.34: Chyba z nepozornosti

- Stejně jako ve 3. ročníku, tak i zde žáci na modelu *soubor předmětů* vyznačovali $\frac{3}{4}$ na každém jednotlivém kroužku a to ve čtyřech případech (obrázek 2.35). Zamýšlím se nad tím, zda jde o neznalost tohoto modelu, či mé znázornění modelu *soubor předmětů* mohlo být pro žáky matoucí.

Obr. 2.35: Neuvědomění si celku

2.3.4 Závěr 2. části výzkumu

Ve 2. části výzkumu se potvrdily očekávané výpovědi, které jsem předpokládala (str. 69):

- *Přestože učivo o zlomcích je v očekávaných výstupech zařazeno až do 2. období základní školy (4. – 5. ročník), většina žáků 3. ročníku bude na základě vlastních zkušeností schopna vyznačit část z celku na všech uvedených modelech. Ne všichni žáci však vyznačí* $\frac{3}{4}$ *správně, to znamená, že někteří žáci rozdělí celek pouze na tři části.*

- *Jelikož žáci 4. ročníku již mají zkušenosti s učivem o zlomcích, přepokládám, že téměř všichni správně graficky znázorní $\frac{3}{4}$ na všech uvedených modelech.*

2. část výzkumu se hodně lišila od předchozích částí. Měla jsem zde možnost více pozorovat, jak žáci pracují. Všímat si, čím jejich práce začíná a čím končí, nad kterými modely žáci strávili nejvíce času, či které měli hotové během „mrknutí oka“. To vše mi pomohlo udělat si lepší představu o jejich znalostech či neznalostech.

Musím říci, že mě velice překvapily znalosti žáků ve 3. ročníku, kdy učivo o zlomcích ještě není zařazeno do očekávaných výstupů. Ze získaných prací je patrné, že žáci již mají vybudovanou představu o dělení celku na části. Obdobné je to i ve 4. ročníku. Přestože očekávané výstupy jsou definovány až na konci 2. období (5. ročník), tak u většiny žáků je tato představa na dobré cestě.

Pokud se v hodinách matematiky budou učivu o zlomcích nadále věnovat a budou jim předkládány další modely, zvláště modely, které jim dělaly největší potíže (*úsečka, soubor předmětů*), tak si myslím, že na konci 5. ročníku budou splňovat již zmíněné očekávané výstupy. Vše však závisí pouze na učitelích a jejich přístupu k tomuto učivu.

Mým cílem však bylo zjistit, zda jsou žáci dostatečně seznámeni i s jinými modely než je model *kruh*, tedy modely: *obdélník, soubor předmětů, úsečka*, a zda na těchto modelech dokážou znázornit určenou část celku. Podle žákovských odpovědí bych řekla, že žáci se zajisté setkali i s jinými modely, než pouze s modelem *kruh*. Ale jak je patrné, kruhový model je pro ně „nejpřitažlivější“. Otázkou zůstává proč?

Osobně jsem čím dál více přesvědčena, že je to způsobeno tím, že žáci jsou modelem *kruh* obklopeni. V běžném životě se s modelem *kruh* setkávají velice často a to v podobě dortu či pizzy. Proto s ním mají největší zkušenosti a často v něm hledají reálnou podporu. Právě proto by se ve škole neměly opomíjet ostatní modely. Možná by bylo dobré pracovat především s těmi ostatními. Zvláště je-li vidět, že ostatní modely, především *soubor předmětů* a *úsečka*, dělaly žákům největší potíže.

Stále však přemýšlím nad tím, zda chyba nebyla i v mém zadání. Především co se týče modelu *soubor předmětů*, třeba skutečně nebylo přehledné, že se jedná o jeden celek. Pro příště bych pracovní list upravila (viz příloha 2). V novém pracovním listu bych použila výstižnější formulaci pro zadání úkolu: V *každém z uvedených obrázků vyznač* *(vybarvi) tři čtvrtiny ($\frac{3}{4}$).* Dále bych jednotlivé modely od sebe oddělila, aby bylo patrné, co je celek. Například dát jednotlivé modely do rámečku, kde bude zřejmé, kde daný model začíná a kde končí. Další úprava by byla zaměřena na model *úsečka* a *obdélník*. Při sestavování pracovního listu, ani při kreslení obrazců jsem si vůbec neuvědomila, že žáci mohou dbát na přesné rozdělení celku na části a nakreslila jsem tyto obrazce „od ruky“. Při jejich rozdělování pak dělalo žákům potíže přesně určit, kde mají narýsovat čáru, jelikož velikosti stran obdélníku (3,5cm x 6,5 cm) i úsečky (7cm) byly špatně dělitelné. U modelu *obdélník* to nebylo až tak složité, ale při dělení úsečky na čtyři části mohl tento fakt činit žákům (zvláště žákům 3. ročníku, kteří na spravedlivě dělení dbali nejvíce) nemalé potíže. Proto bych rozměry předkládaných modelů upravila – *obdélník* (4cm x 6cm), *úsečka* (6cm).

Stejně jako v předchozích částech výzkumu, tak i zde mě napadaly další otázky (náměty pro další výzkumy):

Je zřejmé, že žáci jsou seznámeni s různými druhy modelů. Dokážou však z uvedených modelů vybrat ten nejvhodnější (nejnázornější) k daným slovním úlohám? Model, o který by se mohli během výpočtů „opřít“.

Například:

- *„Hančina maminka upekla bublaninu. Teď neví, zda se u stolu sejde pět nebo šest lidí. Jak má bublaninu nakrájet, aby ji mohla v obou případech spravedlivě rozdělit?“*[22]

2.4 Závěr praktické části

Jako studentka pedagogické fakulty jsem prošla didaktikami různých předmětů, které znám především teoreticky. Vzhledem k tomu, že ve třídách základních škol během povinných praxí trávíme jen několik hodin týdně, není možné projít si prakticky vším učivem a možností vyzkoušet znalosti jednotlivých didaktik je málo. Právě proto jsem

[22] TICHÁ, M. MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. Společnost učitelů matematiky* JČMF [online]. 2006, str. 16 [cit. 2014-02-03]. Dostupné na WWW: <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=-1&ClanekID=188>

se v praktické části své práce zaměřila na učivo o zlomcích, ve výuce na prvním stupni základní školy. Zde jsem hledala odpovědi na otázky:

- **Jaké jsou znalosti žáků v oblasti učiva o zlomcích?**
- **Co žáci umí?**
- **Odpovídají znalosti žáků poznatkům uvedeným v teoretické části?**
- **Jsou jejich znalosti o zlomcích rozvíjeny vyváženě?**

K tomu, abych byla schopna odpovědět na tyto otázky, musela jsem navrhnout, zrealizovat a vyhodnotit několik výzkumných experimentů, které mi pomohly najít odpovědi.

Již v předvýzkumu, kdy jsem se zaměřila na to, jaké znalosti o zlomcích mají žáci na prvním stupni základní školy, jsem se přesvědčila, že toto učivo není pro žáky cizí. Přestože je učivo o zlomcích v očekávaných výstupech Rámcového vzdělávacího programu zařazeno až do 2. období (na konec 5. ročníku), byla jsem velice překvapena, jaké znalosti mají žáci již ve 3. ročníku. Většina žáků má vybudovanou představu o konkrétních zlomcích, i když jednoduchých (a to v podobě slovního vyjádření nebo symbolického zápisu), což svědčí o jejich vhledu do problematiky celku a části.

Je patrné, že učitelé pracují s poznatky, které si žáci přináší z vlastních (mimoškolních) zkušeností ještě dříve, než je určeno v Rámcovém vzdělávacím programu a připravují si základy pro další práci. Řekla bych, že poznatky, které jsem získala ve výzkumné části, odpovídají a v některých případech i předčí poznatky z teoretické části. Například téměř všichni žáci ve 3. ročníku dokázali vyznačit určitou část celku.

To, zda jsou znalosti o zlomcích rozvíjeny vyváženě či nikoli, je velice těžké hodnotit. Záleží na jednotlivých učitelích, kteří jsou za předávání učiva žákům odpovědni. Oni si na základě Rámcového vzdělávacího programu sestavují Školní vzdělávací program. Oni volí, jakými metodami budou se žáky pracovat. Musí si uvědomit, že žáci do školy přicházejí s určitými znalostmi podloženými zkušenostmi z reálného života. Je vhodné využívat již získaných zkušeností a nadále je rozvíjet. Avšak jak je v provedeném šetření patrné, můžeme se zde setkat se stereotypem (model *kruh*). Je nutné předkládat další modely či vytvářet situace, které již nejsou tolik běžné, aby si je žáci mohli pomocí činnosti prožít a poté uložit do paměti a v případě potřeby je zde najít a použít.

3 Závěr

V úvodu jsem se zmínila o slovní úloze, která mě přivedla na téma této diplomové práce „Vytváření představ zlomku na 1. stupni základní školy“, kdy jsem se já jako studentka pedagogické fakulty dostala do situace, že neumím vyřešit úlohu. Usoudila jsem, že je potřeba zaměřit se na toto téma, abych jako budoucí učitelka byla schopna vyučovat učivo matematiky takovým způsobem, aby mu žáci nejen porozuměli, ale také si k matematice vybudovali pozitivní vztah.

Tato situace mi byla podnětem a jakýmsi „hnacím motorem“, který mi pomohl odpovědět na otázky, stanovené v úvodu:

- **Kde se stala ta chyba, že já jako studentka vysoké školy si nedovedu poradit s úlohami pro první stupeň základní školy?**
- **Jak bych tomu já, jako budoucí učitelka na základní škole, mohla předcházet?**
- **Kdy se tématu zlomku začít věnovat?**
- **Kdy začít budovat představy?**
- **Co je vlastně propedeutikou?**
- **Co bych neměla opomenout, abych žáky na prvním stupni základní školy dostatečně připravila na pochopení pojmu zlomek a řešení úloh o zlomcích?**

Již v teoretické části jsem nalezla odpovědi na první otázky. Uvědomila jsem si, že učivo o zlomcích (a nejen to) obklopuje děti již od dětství. Děti se dostávají do různých situací, kdy se s tímto tématem setkávají a vždy si musí a umí nějak poradit. Například spravedlivě rozdělit bonbóny ve skupině kamarádů. Pro nás dospělé to je maličkost, ale pro děti velký úkol, se kterým se musí vypořádat. A právě těchto situací je potřeba využívat. Jako budoucí učitelka prvního stupně si uvědomuji, jak moc je důležité vytvářet situace, kdy jsou žáci postaveni před problém, který musí vyřešit. A pokud si umí poradit v předškolním věku, proč tedy nenavázat již od prvního ročníku základní školy na jejich doposud získané zkušenosti. Myslím si, že v současné době, kdy učitelé mají možnost koncipovat si výuku podle svého uvážení, dokážou velké věci.

V práci se zmiňuji o tom, že učivo o zlomcích je časově náročné. Musím říci, že za časově náročné ho opravdu považuji, ale pokud se od prvního ročníku budu věnovat postupnému rozvíjení chápání vztahu celku a části a tomu navazujícímu tématu zlomek, budu vycházet ze zkušeností žáků a umožním jim pracovat dlouhou dobu činnostně, nikoli pouze mechanicky počítat, věřím tomu, že si žáci vybudují dostatečně hluboké představy, o které se budou moci ve vyšších ročnících „opřít". Tyto představy považuji za to nejdůležitější, co by mělo být jádrem výuky na prvním stupni základní školy. Právě to pomůže hlouběji porozumět tématu.

Pro budování a uchování představ je vhodné zvolit odpovídající pomůcky. Námitkou učitelů může být, že pomůcky do tříd jsou nákladné a mnohdy se rychle zničí. Ale proč nevyužít dostupných předmětů, které jsou všude okolo nás, například víčka od PET lahví. Během hodin výtvarné výchovy si žáci mohou vyrobit zásoby modelů, které později mohou využívat nejen v hodinách matematiky. Zde záleží pouze na představivosti učitele.

V závěru mohu říci, že mnou stanovené cíle pokládám za splněné. Během vypracovávání teoretické části jsem prohloubila vlastní znalost tématu. Musela jsem zapracovat na svých oborově didaktických znalostech. Také jsem se seznámila s tím, jak je učivo o zlomcích vymezeno v kurikulárních dokumentech, získala vhled do učiva zabývajícího se zlomky a seznámila jsem se s propedeutikou zlomků.

V praktické části jsem se nejdříve seznámila s možnostmi jak koncipovat, realizovat a zhodnocovat výsledný experiment, provádět akční výzkum, který mi pomůže zkvalitnit vlastní profesionalitu. Stanovila jsem si tedy otázky a s využitím smíšeného výzkumu jsem se na ně snažila odpovědět. V průběhu výzkumu jsem narazila na některé problémy, které toto téma často doprovází. Ujasnila jsem si, jakým způsobem se zaměřit na odhalení problémů a zamýšlela jsem se, na základě znalostí získaných v teoretické části, co může být příčinou těchto problémů a jak jim předcházet.

Napsáním diplomové práce můj zájem o toto téma zdaleka nekončí. Stejně jako v předchozích, tak i v poslední části výzkumu mě napadaly nové otázky rozvíjející toto téma a jimi bych se ve své učitelské profesi ráda dále zabývala.

Pevně věřím, že tato práce poslouží i dalším čtenářům z řad studentů a učitelů, kteří zde mohou najít inspiraci, náměty či zamyšlení do své učitelské praxe.

Zdroje

Literatura

DIVÍŠEK, J., BUŘIL, Z., a kol.: *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

GAVORA, P.: *Úvod do pedagogického výzkumu*. Překlad Vladimír Jůva. Brno: Paido, 2000, 207 s. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3179-6.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J.: *Matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 65 s. ISBN 978-807-2386-277.

HEJNÝ, M.: Představa celku a jeho části. In *Sborník příspěvků: Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let:* konference JČMF Frýdek-Místek 29. 9. – 1. 10. 1999, str. 5 – 21.

HEJNÝ, M.: Zlomky. In Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Vondrová. (Ed.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 2. díl, Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, Praha, 2004, str. 343 - 356. ISBN 80-7290-189-31.

HORKEL, J. *Nestandardní úlohy v matematice*. Praha, 2005. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Tichá.

HOŠPESOVÁ, A., KUŘINA, F., TICHÁ, M.: *Celek a část v primárním matematickém vzdělávání.* Nepublikovaný interní materiál (podklad pro workshop na konferenci SEMT 03), 2003.

KOMAN, M., KUŘINA, F., TICHÁ, M.: *Matematika pro 5. ročník základní školy: učebnice*. 1. vyd. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1997, 127 s. ISBN 80-858-2325-X.

KUŘINA, F. Matematická kultura a matematická gramotnost. In HOŠPESOVÁ. A. (Ed.). *Matematická gramotnost a vyučování matematice.* České Budějovice, 2011, str. 19 – 38. ISBN 978-80-7394-259-5.

KUŘINA, F., CACHOVÁ, J.: *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2009, 332 s. ISBN 978-802-0017-437.

KUŘINA, F.: Škola a vzdělání v roce 400. výročí narození Jana Amose Komenského. Pedagogika, 1993, č. 3. str. 309 – 320. ISSN 0031-3815.

LANGEROVÁ, L. *Představy zlomků u žáků ve věku 9 – 13 let.* Praha, 2007. 83 s. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Hejný.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník.* Praha: Portál 2013, ISBN 978-80-262-0403-9.

SEDLÁKOVÁ, J. *Chápání zlomků u dětí ze 7. a 8. třídy.* Praha, 2006. 153s. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Pedagogická fakulta. Katedra pedagogické a školní psychologie. Vedoucí práce M. Rendl.

SVOBODOVÁ, L. *Rozvíjení aktivity a tvořivosti ve vyučování tématu zlomek v 6. – 7. ročníku ZŠ*. Praha, 2014. 87 s. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Tichá.

TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J.: *Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. Společnost učitelů matematiky JČMF* [online]. 2006 [cit. 2014-02-03]. Dostupné na WWW: <http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Default.aspx?PorZobr=20&PolozkaID=-1&ClanekID=188>

VAŠÍČKOVÁ, J. *Představy a interpretace zlomků u žáků 5. ročníku ZŠ.* Praha, 2007. 110 s. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce M. Tichá.

Elektronické zdroje

[1] Národní ústav pro vzdělávání. Školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků [online]. [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: < http://www.nuv.cz/ramcove-vzdelavaci-programy>

[2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze od 1. 9. 2013) úplné znění upraveného RVP ZV [online]. Praha 2013 [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: < http://www.nuv.cz/file/319>

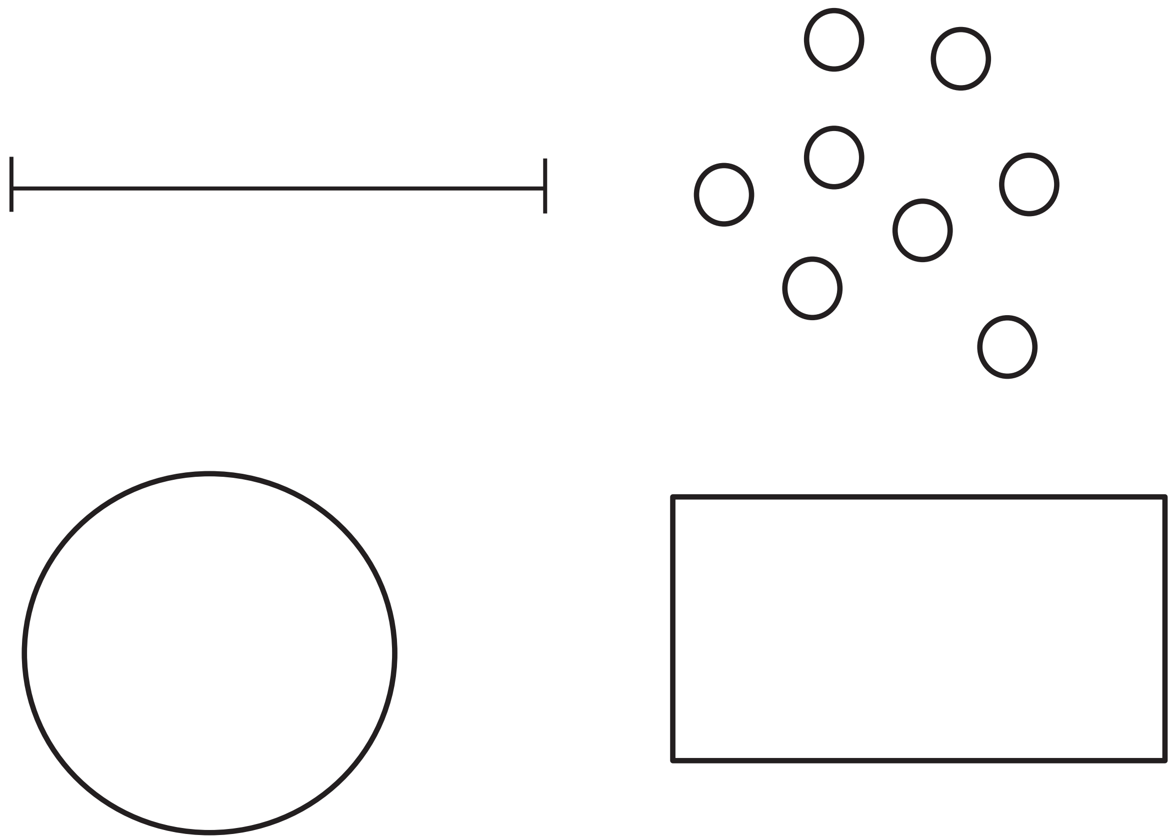
[3] Zákon číslo 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon), ve znění pozdějších předpisů [online]. [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: <http://portal.gov.cz/app/zakony/zakonPar.jsp?idBiblio=58471&fulltext=~C5~A1koln~C3~AD~20vzd~C4~9Bl~C3~A1vac~C3~AD~20program&nr=561~2F2004&part=&name=&rpp=15#local-content>

[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze od 1. 9. 2013) úplné znění zpraveného RVP ZV s barevně vyznačenými změnami [online]. Praha 2013 [cit. 2014-05-23]. Dostupné na WWW: <http://www.nuv.cz/file/213/>

Seznam příloh

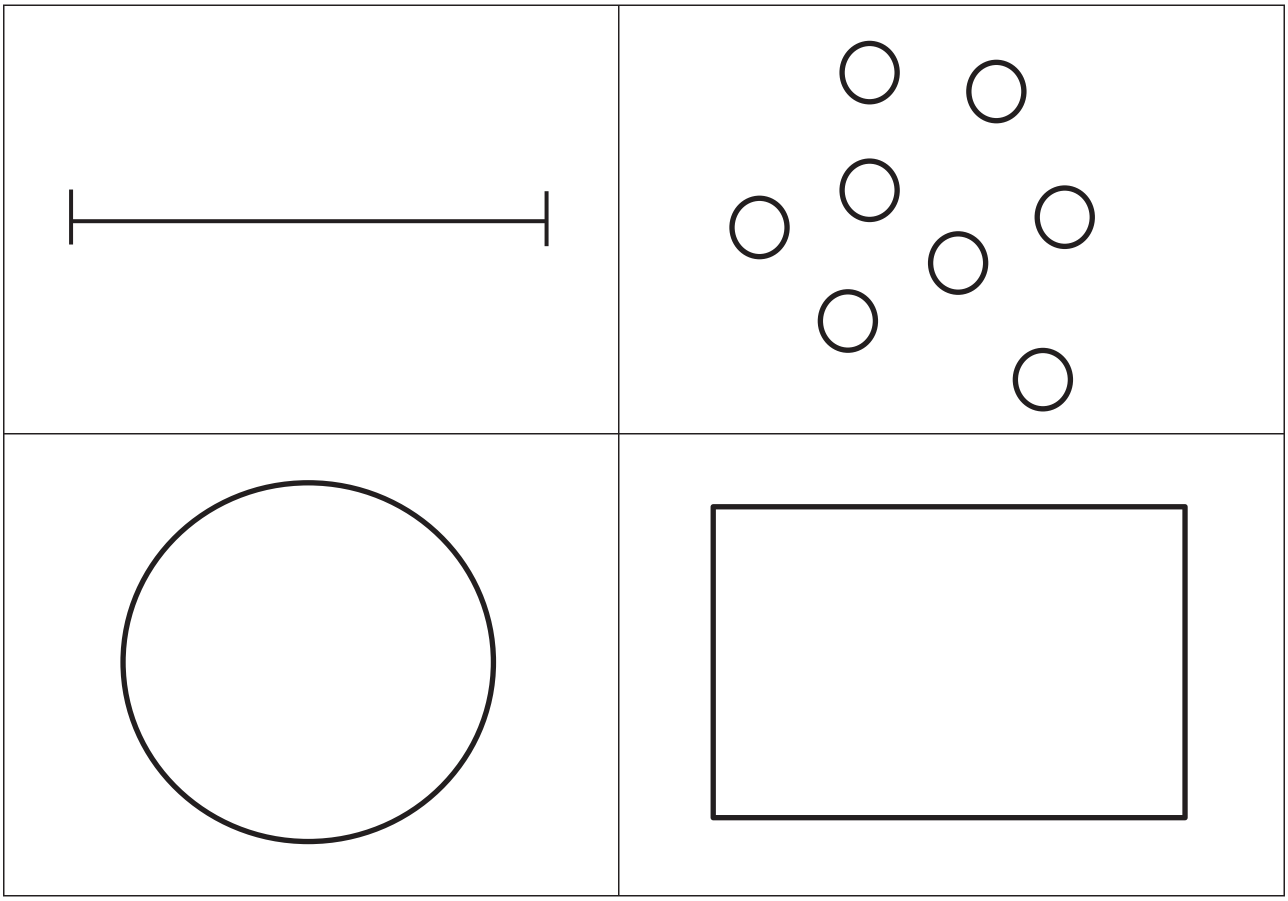
Příloha 1

Vyber si jeden ze čtyř obrázků. Na vybraném obrázku vyznač (vybarvi) $\frac{3}{4}$ (tři čtvrtiny).



Příloha 2

V každém z uvedených obrázků vyznač (vybarvi) $\frac{3}{4}$ (tři čtvrtiny).



Příloha č. 1

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
M.D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1

Prohlášení žadatele o nahlédnutí do listinné podoby závěrečné práce před její obhajobou

Závěrečná práce:

Druh práce	
Název práce	
Autor práce	

Jsem si vědom/a, že závěrečná práce je autorským dílem a že informace získané nahlédnutím do zveřejněné závěrečné práce nemohou být použity k výdělečným účelům, ani nemohou být vydávány za studijní, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost jiné osoby než autora.
Byl/a jsem seznámen/a se skutečností, že si mohu pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny závěrečné práce, jsem však povinen/povinna s nimi nakládat jako s autorským dílem a zachovávat pravidla uvedená v předchozím odstavci tohoto prohlášení.
Jsem si vědom/a, že pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny dané práce lze pouze na své náklady a že úhrada nákladů za kopírování, resp. tisk jedné strany formátu A4 černobíle byla stanovena na 5 Kč.

V Praze dne …...........…………………

Jméno a příjmení žadatele	
Adresa trvalého bydliště	

podpis žadatele

Příloha č. 2

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
M.D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1

Prohlášení žadatele o nahlédnutí do listinné podoby závěrečné práce
Evidenční list

Jsem si vědom/a, že závěrečná práce je autorským dílem a že informace získané nahlédnutím do zveřejněné závěrečné práce nemohou být použity k výdělečným účelům, ani nemohou být vydávány za studijní, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost jiné osoby než autora.
Byl/a jsem seznámen/a se skutečností, že si mohu pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny závěrečné práce, jsem však povinen/povinna s nimi nakládat jako s autorským dílem a zachovávat pravidla uvedená v předchozím odstavci tohoto prohlášení.

Poř. č.	Datum	Jméno a příjmení	Adresa trvalého bydliště	Podpis
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				